JORNADAS DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

JEM VII

MEMORIAS DE LAS

VII JORNADAS DE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

UNSa
Universidad Nacional de Salta

Memorias de las VII Jornadas de Enseñanza de la Matemática (JEM)

Universidad Nacional de Salta
Memorias de las VII Jornadas de Enseñanza de la Matemática (JEM) / Compilado por Sángari, Antonio Noé - Salta: Universidad Nacional de Salta, 2024.

Archivo digital: descarga y online
ISBN 978-987-633-615-4

Compiladores

Guzmán González, Ramiro
Sángari, Antonio Noé

Revisores de talleres y comunicaciones breves

Etchegaray, Silvia Catalina
Araujo, José Orlando
Beatriz Susana, Marron
García, José Ignacio
Esper, Lidia Beatriz
Sángari, Antonio

Maquetación

Martinez, Gonzalo Matias

Diseño e identidad

Díaz, Aldana Lucía

Universidad Nacional de Salta
Av. Bolivia 5150 – Salta Capital

Autoridades
Universidad Nacional de Salta

Rector
Ing. Daniel HOYOS

Vicerrector
Cr. Nicolás INNAMORATO

Secretario de Extensión
Lic. Rubén Emilio CORREA

Facultad de Ciencias Exactas

Decano
Mg. Gustavo Daniel GIL

Vicedecana
Dra. María Rita MARTEARENA

Departamento de Matemática

Director
Prof. Julio POJASI

Vicedirector
Dr. Jorge YAZLLE

Secretario
CPN. Cristian PINTO

Prosecretaria
Prof. Ivone PATAGUA

Equipo Editorial JEM

Coordinación General

Prof. Celia Villagra
Prof. Silvia Mabel Baspiñeiro
Prof. Blanca Azucena Formeliano
Prof. Ivone Anahí Patagua
Prof. Antonio Noé Sángari

Plataforma

Open Journal System (OJS)

Lic. Ramiro Guzmán González

Diseño de Identidad

Lic. Aldana Lucía Díaz

Maquetación

Gonzalo Matias Martinez

Declaraciones de Interés Educativo y Avales Institucionales

Rectorado
Universidad Nacional de Salta
RES. R. N° 773/2023

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de Salta
RESD-EXA N° 182/2023

Subsecretaría de Desarrollo Curricular
e Innovación Pedagógica
Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia
y Tecnología de la Provincia de Salta
RES. N° 152/2023

Prólogo

Las VII Jornadas de Enseñanza de la Matemática híbridas, realizadas en su parte presencial en las instalaciones de la Universidad Nacional de Salta del 24 de julio al 2 de agosto de 2023, representaron un hito en el continuo esfuerzo por mejorar la calidad de la educación matemática en nuestra región. Durante esos días, docentes, investigadores y estudiantes se congregaron con el objetivo de reflexionar sobre sus prácticas docentes, compartiendo experiencias y conocimientos que, sin duda, contribuirán al enriquecimiento de la comunidad educativa.

Las Jornadas ofrecieron un variado programa de actividades que incluyó conferencias magistrales, talleres prácticos y comunicaciones breves. Entre las actividades destacadas, se encuentran las conferencias de Valeria Borsani, que abordó *El pasaje de la aritmética al álgebra en los primeros años de la escuela media*, la de Andrés Rieznik, que abordó *Discalculia, un capítulo olvidado de la neuropsicología*, y el de Daniela Reyes, *Empoderamiento docente, ¿por qué pensar en ello?* y cinco talleres sobre enseñanza de la matemática. La participación activa de los asistentes reflejó el interés y el compromiso con la mejora continua de la enseñanza de la matemática.

Queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a todos los participantes, ponentes y talleristas que, con su dedicación y entusiasmo, hicieron posible el éxito de este evento. Asimismo, extendemos nuestro reconocimiento a la Universidad Nacional de Salta y a todas las instituciones que nos brindaron su apoyo.

Las presentes Memorias recogen las ideas, debates y conclusiones surgidas durante las Jornadas, sirviendo como un valioso recurso para todos aquellos interesados en la enseñanza de la matemática. Esperamos que este compendio inspire a los lectores a continuar explorando y aplicando nuevas estrategias pedagógicas en sus aulas.

Con la mirada puesta en el futuro, confiamos en que las próximas ediciones de las Jornadas de Enseñanza de la Matemática seguirán siendo un espacio de encuentro, reflexión e innovación para nuestra comunidad.

Prof. Antonio Noé Sángari
Coordinador de las VII Jornadas de Enseñanza de la Matemática

Índice

I
Talleres

Descifrando los secretos de la pista: estadística y simulaciones en la Fórmula 1

Cinthia Noelia del Valle Vides
Universidad Nacional de Salta
diamantecinthia@gmail.com

Ezequiel Francisco Chocobar
Universidad Nacional de Salta

Resumen. Este taller consistirá, en líneas generales, en mostrar a los cursantes una aplicación tal vez poco conocida pero muy curiosa y utilizada de la Estadística descriptiva en el ámbito de la Fórmula 1, a través de una propuesta de trabajo con lotes de datos reales en la que se utilizarán los conceptos básicos de esta rama de la matemática, con ayuda del programa Microsoft Excel. A su vez, se espera que la propuesta pueda ser útil para aquellos asistentes que quizás se dedican a la enseñanza de la Estadística, de manera que a partir de ella sean capaces de pensar en otras propuestas didácticas originales para llevar a cabo con sus respectivos grupos de alumnos.
Se trabajarán con los tiempos realizados por algunos de los pilotos en cada una de las vueltas de la Práctica 2 de un Gran Premio de F1, los cuales pueden ser organizados en una tabla. A partir de este lote de datos se pueden obtener resultados muy importantes para las escuderías como por ejemplo el promedio de vueltas, la vuelta rápida y/o lenta (valores alejados), el ritmo de carrera (qué tan consistente es el desempeño del binomio piloto-auto, es decir si este realiza vueltas muy rápidas pero también muy lentas o si logra mantener el ritmo en toda la carrera), estimar la degradación de los neumáticos, etc. y a su vez comparar los resultados del binomio analizado con los binomios contrincantes para predecir el resultado del Gran Premio.

1. Introducción

1.1 Importancia del taller

Este taller consistirá, en lineas generales, en mostrar a los cursantes una aplicación tal vez poco conocida pero muy curiosa y utilizada de la Estadística descriptiva en el ámbito de la Formula 1. A través de una propuesta de trabajo con lotes de datos reales en la que se utilizaran los conceptos básicos de esta rama de la matemática, con ayuda del programa Microsoft Excel. A su vez, se espera que la propuesta pueda ser útil para aquellos asistentes que quizás se dedican a la enseñanza de la Estadística, particularmente en el nivel medio y superior, de manera que a partir de ella sean capaces de pensar en otras propuestas didácticas originales para llevar a cabo con sus respectivos grupos de alumnos.

La Fórmula 1, abreviada como F1 y también denominada la «categoría reina del automovilismo», es la competición de automovilismo internacional más popular y prestigiosa, superando a otras categorías como la NASCAR, el Campeonato Mundial de Rally, el Campeonato Mundial de Turismo o la Fórmula E, entre otras. A cada carrera se le denomina Gran Premio y el torneo que las agrupa se denomina Campeonato Mundial de Fórmula 1. La entidad que la dirige es la Federación Internacional del Automóvil (FIA) y actualmente compiten en ella 10 escuderías con dos pilotos por cada una (que también compiten entre ellos), es decir un total de 20 pilotos. Pero es importante mencionar que, como explica Ramírez [1], un Gran Premio de Fórmula 1 no sólo es la carrera que se lleva a cabo los domingos, ni la sesión de calificación, aunque para los aficionados son los eventos más emocionantes. La actividad en pista comienza desde el viernes (en algunos casos extraordinarios, se adelantan al jueves) con las prácticas libres. En total, son tres sesiones de prácticas libres a lo largo del fin de semana de un Gran Premio, cada una de ellas con una duración de 60 minutos, las cuales resultan indispensables para los pilotos y los equipos.

La segunda sesión de entrenamientos es posiblemente la más importante (y es justamente la que nos interesa analizar en este taller), ya que se realiza a la misma hora (casi siempre) a la cual se desarrollará la carrera, por lo que los ingenieros obtienen información más precisa sobre el clima y la temperatura, lo cual es vital para conocer las condiciones y comportamiento de los neumáticos. De esta manera, los autos utilizan dos juegos de neumáticos, los mismos que se usarán en la carrera y en la calificación.

Normalmente, los equipos usan los primeros 40 minutos para marcar tiempos rápidos, por lo que usan poco combustible (para hacer el auto más ligero) y eso arroja un panorama más claro de lo que podría suceder en la sesión de calificación. Los últimos 20 o 15 minutos, las escuderías optan por cargar el almacén de combustible hasta casi llenarlo. Esto hace que el auto sea más pesado y lento, y a esto se le conoce como "ritmo de carrera", pues arroja datos y condiciones a lo que será el inicio de la carrera.

En este taller se trabajaran con los tiempos realizados por algunos de los pilotos en cada una de las vueltas de la *Práctica 2*, los cuales pueden ser organizados en una tabla. A partir de este lote de datos se pueden obtener resultados muy importantes para las escuderías como por ejemplo el promedio de vueltas, la vuelta rápida, la vuelta lenta (valores alejados), el ritmo de carrera (que tan consistente es el desempeño del binomio piloto-auto, es decir si este realiza vueltas muy rápidas pero también muy lentas o si logra mantener el ritmo en toda la carrera), si hay tiempos de vuelta muy alejados a los demás, estimar la degradación de los neumáticos, etc. y a su vez comparar los resultados del binomio analizado con los binomios contrincantes para predecir el resultado del Gran Premio. Con estos resultados algunas veces las escuderías toman decisiones en cuanto estrategia o mecánica del automóvil para mejorar el rendimiento, pero el aporte mas importante de este estudio radica en lo que significa para la preparación mental del piloto y del resto del equipo para un posible resultado al final de la carrera, Efectivamente, todo esto no puede ser logrado sin la ayuda de la Estadística.

Para cursar este taller se necesita que los participantes tengan una computadora o tablet con Microsoft Excel descargado en versión 2016 o posteriores, o en su defecto alguna versión anterior y el software Geogebra. Esto se debe a que las versiones anteriores de Microsoft Excel no tienen la opción para realizar Diagramas de Cajas.

1.2 Fundamentos

De acuerdo a la definición que presenta Ahumada [2], «*La estadística es la ciencia que estudia los métodos para recoger, organizar, resumir y analizar datos, así como para sacar conclusiones válidas para la toma de decisiones razonables en situaciones de incertidumbre*». De esta definición surgen dos ramas importantes de la estadística: Descriptiva e inferencial. La Estadística descriptiva tiene por objeto presentar y resumir los datos mediante cuadros, tablas y gráficos con la finalidad de describir las características del conjunto observado. Se obtienen conclusiones que no van más allá de ese conjunto. Las destrezas más importantes para la estadística son saber diseñar una observación, encuesta o experimento, utilizarla para obtener datos, analizarlos, presentarlos y a partir de ellos formular conclusiones. Es por esto que buscamos que en este taller los cursantes no solo sean capaces de realizar gráficos y utilizar formulas sino que puedan interpretar los resultados obtenidos en el contexto de la F1.

A continuación presentamos los principales conceptos matemáticos y/o estadísticos relevantes para la propuesta del taller:

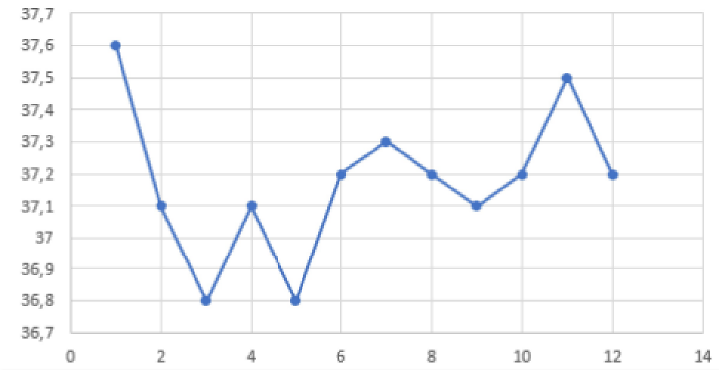
De acuerdo a lo planteado por Ahumada [2] es importante el modo en que se realiza el registro de datos con los que se va a trabajar. Uno puede, como en este caso, tomar registros o relevamientos ya realizados por otros. En la actualidad, el registro, o las mediciones son cada vez más precisas, con la ayuda de las nuevas tecnologías. Estos datos son valores observados de una **variable**, entendiendo como variable a la característica bajo estudio que puede tomar valores (o modalidades) diferentes. Esta variable podrá ser medida o no. En el caso de la propuesta de este taller la variable bajo estudio son los tiempos de vuelta realizados por cada binomio piloto-auto. Se trata de una variable cuantitativa continua dado que entre dos valores dados, la variable puede tomar cualquier valor intermedio (es importante destacar que las vueltas realizadas por los pilotos son superiores a un minuto e inferiores a 2 minutos, aquí que trabajaremos con tiempos considerando los segundos y hasta la décima de segundo). En la tabla de la figura 1.1 se muestra un ejemplo de un lote de datos presentado en forma de tabla, el cual consiste en los tiempos de vuelta realizados por un piloto determinado en un total de 12 vueltas de su Practica 2.

Los datos pueden organizarse de diferentes maneras. Para algunos tipos de datos, como los de esta propuesta por ejemplo, será conveniente la representación gráfica con una curva simple (**diagrama de líneas**). Es importante en este caso la escala elegida para los ejes, ya que la impresión visual del gráfico no debe ser exagerada en ningún sentido. Estos gráficos permiten visualizar de una sola vez la tendencia general y comparar simultáneamente varias tendencias. Esto se ve ejemplificado en la figura 1.2, en donde en el eje horizontal aparecen el numero de vueltas que realizó el piloto y en el eje vertical el tiempo que le llevo realizar dicha vuelta. Como se dijo anteriormente, en el ejemplo consideramos valores como 36,8 segundos, que en realidad indican que un piloto hizo una vuelta de 1 minuto con $36,8$ segundos.

Figura 1.1. Tiempos de vuelta.

VUELTA	TIEMPO
1	37,6
2	37,1
3	36,8
4	37,1
5	36,8
6	37,2
7	37,3
8	37,2
9	37,1
10	37,2
11	37,5
12	37,2

Figura 1.2. Gráfico de líneas.



Cuando tenemos variables continuas, organizamos la tabla de frecuencias definiendo intervalos de clase. Esta tabla permite realizar un gráfico llamado **histograma**. Para realizar dicho histograma los datos se clasifican en intervalos y en cada uno de ellos se representa la frecuencia correspondiente con una barra. Los datos se agrupan con el fin de brindar información más rápida, pero al formar los intervalos se pierde la información puntual, por lo tanto se debe cuidar no perder demasiada información. En el histograma, las frecuencias de clase están representadas por el área de la barra en cada clase. Por esto la altura de cada barra, será la frecuencia dividida por la amplitud del intervalo. Si los intervalos son de la misma amplitud, se puede realizar el histograma usando las frecuencias como alturas, ya que en ese caso el diagrama es el mismo, sólo sufre un cambio de escala que no modifica la información mostrada.

Dentro de lo posible, es conveniente trabajar con intervalos de igual amplitud. Sobre el histograma se dibuja el **polígono de frecuencias** que se obtiene uniendo los puntos medios de la parte superior de cada barra; se suele agregar intervalos de frecuencia cero al comienzo y al final, para comenzar y terminar el polígono en el eje. El polígono de frecuencias muestra la misma información que el histograma, pero da una idea de crecimiento o decrecimiento más real que las barras del histograma.

En la figura 1.3 se muestra un ejemplo de un histograma realizado a partir de los tiempos obtenidos por un piloto en una simulación de carrera como las que se estudiaran en el taller (los mismos de la tabla de la figura 1.1 y a partir de los que se realizo el grafico de lineas de la figura 1.2). Sobre el eje horizontal aparecen las marcas de clase, es decir el punto medio del intervalo.

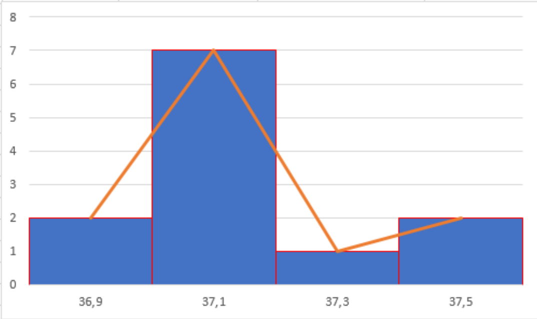
A partir de un lote de datos, Walpole et al. [3] menciona las siguientes medidas de localización o posición:

- **Media aritmética**: Supongamos que las observaciones en una muestra son $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La media de la muestra se denota con $\overline{x}$ y es $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

Figura 1.3. Ejemplo de un histograma construido a partir de los tiempos realizados.

Número de intervalos		Número de Datos	MIN	Max	Amplitud del intervalo	rango
4		12	36,8	37,6	0,2	0,8

Número de intervalo	Límite inferior	Límite superior	Frecuencia Absoluta	Marca de Clase	Frecuencia Acumulada
1	36,8	37	2	36,9	2
2	37	37,2	7	37,1	9
3	37,2	37,4	1	37,3	10
4	37,4	37,6	2	37,5	12
			0		



- **Mediana**: Supongamos que las observaciones en una muestra son $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ordenadas de forma creciente. La mediana de la muestra dependerá de si n es par o impar:

$$\widetilde{x} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{impar} \\ x_{\frac{n}{2}} & \text{par} \end{cases}$$

Ahumada [2] menciona otras medidas de posición que son importantes para los casos analizados en este taller que son los **cuartiles**:

- **Primer cuartil**: Se denomina primer cuartil (Q_1) al número real tal que a lo sumo el 25 % de los datos son menores que él y a lo sumo el 75 % son mayores.
- **Segundo cuartil**: Coincide con la mediana $\widetilde{x}$.
- **Tercer cuartil**: Se denomina primer cuartil (Q_3) al número real tal que a lo sumo el 75 % de los datos son mayores que él y a lo sumo el 25 % son mayores.

También son importantes las medidas de dispersión:

- **Rango**: Es la diferencia entre el menor y el mayor valor de la variable.
- **Rango intercuartil**: Es la diferencia entre el primer cuartil y el tercer cuartil.
- **Varianza:** Se define como el promedio de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

- **Desviación estándar**: Se define como la raíz cuadrada de la varianza. Mide la dispersión de los datos, es decir, mientras más dispersos se encuentren los datos mayor es su desviación estándar.

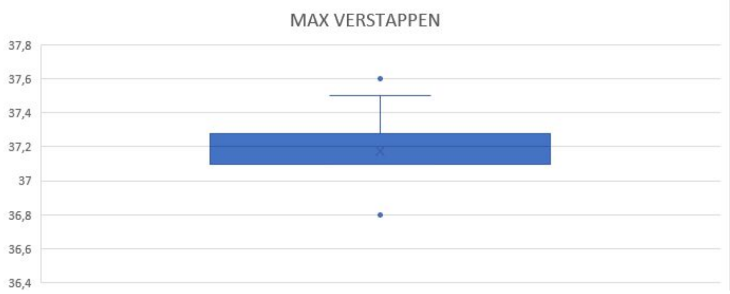
Ahora bien, describir un lote de datos significa hacer referencia, entre otras cosas, a la posición, dispersión, forma, que tal lote presenta para realizar un análisis y sacar conclusiones acerca del mismo. La técnica que utilizaremos para el análisis exploratorio de datos en este caso es el **Diagrama de Cajas** o comúnmente conocido como ***box plot***.

Este diagrama consiste en una caja a lo largo del eje de la variable, donde se encuentra el 50 % central de los datos (o sea que incluye los dos cuartos centrales), y el resto constituyen las colas de la distribución (el primer cuarto, la cola izquierda; el cuarto, la cola derecha), representadas por segmentos a los costados de la caja. Si hay valores muy extremos, las colas no comienzan en los extremos sino que se destacan estos valores con una marca y la cola comienza en el dato inmediato siguiente. En la figura 1.4 se muestra un ejemplo de un *box plot* que muestra la información del lote datos presentado en la tabla de la figura 1.2.

Como vemos, la simplicidad del dibujo hace que notemos rápidamente en él las características importantes, como por ejemplo:

- **Valores alejados**: se distinguen por las marcas especiales que lo separan del resto del diagrama.

Figura 1.4. Box Plot - Max Verstappen



- **Posición**: el eje de la variable dará los valores de las medidas, especialmente se observa la posición de la mediana aunque también se puede agregar la posición de la media.
- **Dispersión**: cajas anchas nos sugieren distribuciones muy dispersas en la parte central mientras que cajas angostas nos muestran una gran concentración de datos (teniendo en cuenta que el ancho de la caja es el rango intercuartil). La longitud de las colas por su parte nos dirá la mayor o menor concentración de los datos en las zonas extremas.

De esta manera, como se menciono anteriormente, estos conceptos nos permitirá no solo conocer el desempeño de los binomios piloto-auto durante las practicas sino también realizar algunas predicciones sobre la carrera entendiendo el "predecir" como razonar sobre el futuro con base en una experiencia previa.

Por otra parte, como mencionamos en la introducción, uno de los objetivos principales de este taller es mostrar una aplicación curiosa de la Estadística en la Formula 1. Motiva nuestro interés en parte los aportes de Guzman [4] en los que menciona la importancia de que el aprendizaje de las matemáticas no se realice explorando las construcciones matemáticas en si mismas sino en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y dan motivación y vitalidad. El autor resalta el gran poder motivador que la modelización y las aplicaciones poseen y es justamente por esto que creemos que la propuesta permitirá desarrollar un interés por las aplicaciones de la Estadística (particularmente en el mundo deportivo) permitiendo así la creación de un espacio de aprendizaje ameno.

De acuerdo a A. M. Bressan y O. Bressan [5] las graficas o gráficos tienen la enorme ventaja de permitir apreciar con una rápida mirada una notable cantidad de información; por ello la propuesta le pide a los cursantes la realización de diferentes gráficos para destacar las características y la información que brinda cada uno de ellos. Por otro lado, los autores destacan que uno de los objetivos fundamentales de la estadística es poder dar un conjunto reducido de valores que puedan resumir en forma adecuada una gran cantidad de información; en nuestro caso particular buscaremos resumir los resultados mas importantes de la Practica 2 a través de las medidas de dispersión y posición mas importantes y de los gráficos que pueden realizarse. Mencionan ademas algunos ordenes de dificultad en la aprehensión del concepto de media aritmética o promedio entre los cuales nos interesan los siguientes:

- El promedio puede eventualmente ser diferente a todos los valores observados. Buscamos hacer hincapié en que lo que se calcula es un promedio de vueltas obtenido por un piloto que podría no coincidir con ningún tiempo de vuelta realizado por dicho piloto.
- Si bien el promedio es una cantidad muy importante, un lote de datos tiene mucha información y características que el promedio no expresa. Veremos como tal vez un piloto puede tener un mejor promedio de vueltas que otro y sin embargo terminar por detrás de este a causa de otras características importantes como por ejemplo el ritmo de carrera.

Con respecto al trabajo con Excel, Valverde Berrocoso et al. [6], en un articulo que habla entre otras cosas sobre la importancia de que el docente tenga incorporados no solo el conocimiento disciplinar y pedagógico sobre lo que desea enseñar sino que también es importante el conocimiento de la tecnología que puede utilizar en dicha enseñanza, nos mencionan que el software es un producto nunca acabado, siempre por pulir, susceptible de ser alterado para cumplir nuevas funciones y que para algunos profesores esto es difícilmente asumible y admisible dentro de un aula. El hecho de que la mayoría del software esté diseñado para contextos no educativos contribuye aún más a esta opacidad. De esta manera, adaptar software de propósito general del entorno laboral (por ej. las hojas de cálculo) a la práctica escolar requiere trabajar a través de la opacidad para reconfigurar y modificar sus propósitos iniciales a las necesidades educativas. Teniendo en cuenta esto y la necesidad de la preparación de los profesores en los usos educativos de la tecnología para el desarrollo de Buenas Prácticas educativas con TIC es que se ha pensando en una propuesta que permita visualizar lo útil que resulta el uso del software Excel y/o GeoGebra a la hora de trabajar con Estadística y la importancia de su inclusión en las propuestas didácticas. Los autores mencionan además que aunque las administraciones educativas han dedicado en los últimos años un importante esfuerzo en la formación tecnológica del profesorado en actividad, y sobre todo durante y después de la pandemia, lo cierto es que en la actualidad aún son muchos los profesores que no se consideran competentes para abordar la integración de las TIC en sus prácticas docentes y que, en consecuencia, no han descubierto la relevancia de estos nuevos medios para el aprendizaje. Entonces esperamos que este espacio aporte a esta cuestión, creando también un espacio de trabajo colaborativo con herramientas digitales.

Con respecto a la evaluación Crippa y Guzner [7] menciona la importancia en que no solo se evalúen contenidos sino también habilidades actitudes y procedimientos. Por otro lado también menciona las "evaluaciones sin prueba" ya que una de sus ventajas es que permite evaluar también los aspectos mencionados anteriormente. Uno de los ejemplos de este tipo de evaluaciones es justamente lo que la autora denomina como "Evaluación por medio de carpetas o *portfolios*" y que consiste en que los alumnos confeccionen una carpeta que incluya algunas de sus producciones en base a criterios propuestos por el docente. Esto propicia entonces por ejemplo fomentar la exposición de los propios procedimientos, valorar la planificación, estructuración y adaptación continua a una situación problemática, establecer relaciones interdisciplinarias a través del trabajo con problemas relativos a otros contextos. Es por esto que a la hora de pensar la evaluación final y teniendo en cuenta que el publico destinatario del taller serán estudiantes de profesorados y docentes se propone la elaboración grupal de un documento que hará de alguna manera el papel de carpeta en donde presentará un resumen de los trabajado en el taller. Aquí se evaluara también la capacidad de trabajar en equipo, la presentación en tiempo y forma de lo pedido, la habilidad para el uso de software como Excel, la explicitación de los procedimientos matemáticos que se utilizan para llegar aun cierto resultado, etc.

2. Contenidos

Los contenidos que se desarrollaran a lo largo del taller son:

- Variables cuantitativas continuas.
- Grafico de lineas
- Histogramas
- Diagramas de caja - box plot
- Medidas de posición: Media aritmética, mediana y cuartiles
- Medidas de dispersión: Rango, Rango intercuartil, Desvío.
- Funciones de Excel para calculo de medidas y realización de gráficos estadísticos.

3. Requisitos previos

- Conocer nociones muy básicas de Excel (como por ej: tipeado de datos en una tabla y ordenamiento de los mismos)
- Tener descargado Excel en su versión 2016 en adelante o bien una versión previa conjuntamente con el programa GeoGebra.
- Haber realizado algún curso previo sobre nociones básicas de estadística descriptiva (Manejar conceptos de medidas de posición y dispersión de un lote de datos y armado de gráficos de linea e histogramas).

4. Objetivos

Que el asistente al taller sea capaz de:

- Utilizar Excel para realizar un histograma a partir de una muestra de tiempos de vueltas realizadas por pilotos de F1 en una simulación de carrera.
- Obtener, con ayuda del programa, las medidas de posición y dispersión del lote de datos.
- Construir un boxplot que modelice la situación presentada en las simulaciones.

- Interpretar el boxplot teniendo en cuenta las medidas de dispersión y posición y sacar conclusiones sobre el rendimiento del binomio auto-piloto a partir de él.
- Realizar predicciones para la carrera a partir de los datos obtenidos comparando su trabajo con el de sus compañeros.

5. Actividades

5.1 Actividades previas

En el periodo de actividades previas los cursantes tendrán acceso a una presentación en la que se encontrará un breve resumen de los conceptos teóricos de Estadística que serán de gran utilidad para el inicio del taller. Específicamente, estamos hablando de los conceptos de variables cuantitativas continuas, gráficos de lineas medidas de posición y dispersión mas importantes y armado de histogramas, a modo de repaso. Seguidamente, los cursantes deberán desarrollar la siguiente actividad.

ACTIVIDAD PREVIA 1. En la siguiente lista se muestran los campeones del Mundial de Formula 1 y al lado la edad con la que salieron campeón por primera vez (en algunos casos es la única):

Figura 1.5. Tabla de Edades de pilotos Campeones del mundo

FARINA	43	JONES	33
FANGIO	40	PIQUET	29
ASCARI	34	K. ROSBERG	33
HAWTHORN	29	PROST	30
BRABHAM	33	SENNA	28
P. HILL	34	MANSELL	39
G. HILL	33	SCHUMACHER	25
CLARK	27	D. HILL	36
SURTEES	30	VILLENEUVE	26
HULME	31	HAKKINEN	30
STEWART	30	ALONSO	24
RINDT	28	RAIKKONEN	28
E. FITTIPALDI	25	HAMILTON	23
LAUDA	26	BUTTON	29
HUNT	29	VETTEL	23
ANDRETTI	38	N. ROSBERG	31
SCHECKTER	29	VERSTAPPEN	24

a) Analizar los siguientes datos obteniendo así las medidas de posición del lote:
   a) Edad promedio con la que salieron campeones estos pilotos.
   b) Edad del piloto más longevo y más joven en acceder al titulo.
   c) Cuartiles 1, 2 y 3 del lote de datos y el rango intercuartil.
   d) Desvío estándar. ¿Qué crees que representa este valor?
b) A partir de estos resultados desarrollar los siguientes incisos:
   a) Realizar un gráfico de lineas colocando en el eje horizontal los nombres de los pilotos, y en el eje vertical la edad correspondiente.
   b) Realizar un histograma teniendo en cuenta el lote de datos presentado, determinando los intervalos que te resulten mas convenientes.
   c) ¿Qué características del lote de datos se aprecian mejor en cada uno de los gráficos realizados anteriormente?
   d) Escribir una conclusión que resuma todo lo trabajado con la información brindada sobre las edades de los pilotos.

El objetivo de esta propuesta es introducir a los asistentes al trabajo relacionado con la obtención de medidas de posición y dispersión, realización de gráficos estadísticos y elaboración de conclusiones a partir de un cierto lote de datos.

Además los cursantes tendrán acceso a un glosario online con los términos mas usados en la Formula 1 para que puedan ir familiarizándose con ellos. El mismo será similar al que se encuentra en el siguiente enlace https://holatelcel.com/holatelcel/glosario-basico-para-entender-la-formula-1/.

5.2 Primera hora y media presenciales

Este encuentro se realizará teniendo en cuenta la siguiente organización con tiempos estimativos sujetos a las diferentes eventualidades que pudieren surgir:

1. Breve presentación de las personas a cargo del taller, breve sondeo sobre las trayectorias previas de los cursantes haciendo hincapié en sus experiencias con la Estadística y explicación de los requisitos para la aprobación del taller (15 min.).
2. Explicación de que es lo que se busca estudiar y analizar principalmente en este taller, como así también de lo que se necesita manejar para realizar dicho trabajo. (10 min.).
3. Explicación de los conceptos mas importantes de la Fórmula 1 que se necesitan conocer en este taller con participación activa de los asistentes, teniendo en cuenta el glosario que tenían para leer en la etapa de actividades previas y haciendo hincapié en nuestro objeto de estudio. (20 min.).
4. Revisión de la tarea realizada sobre la edad de los pilotos, haciendo un repaso de los conceptos estadísticos que tenían para leer. (25 min.).
5. Orientaciones para las actividades entre clases, enfatizando en el uso de Excel para la obtención de medidas de posición y dispersión y gráficos estadísticos (20 min.).

Observación: Se utilizará como soporte una presentación de Power Point o herramientas similares que estará al alcance los alumnos en la plataforma Moodle después de la clase.

5.3 Primeras dos horas entre clases

En este tiempo los cursantes deberán desarrollar la siguiente consigna:

ACTIVIDAD ENTRE CLASES 1. Teniendo en cuenta el lote de datos de la actividad previa ahora obtener las medidas de posición y dispersión solicitadas y realizar los gráficos pedidos utilizando el software Microsoft Excel, teniendo en cuenta lo visto en clase.

El objetivo de esta tarea es que los cursantes se familiaricen con el uso de Excel en el ámbito educativo y de la Estadística.

5.4 Segunda dos horas presenciales

Este encuentro se realizará teniendo en cuenta la siguiente organización con tiempos estimativos sujetos a las diferentes eventualidades que pudieren surgir:

1. Revisión de tarea, espacio para dudas y consultas sobre lo realizado hasta ahora. (15 min.).
2. Explicación de un ejemplo de simulación de carrera con los tiempos realizados por uno de los pilotos (en este caso el ultimo campeón del mundo Max Verstappen que son los que se muestran en la figura 1.1). Los encargados del taller mostraremos como obtener, utilizando Excel, un grafico de lineas que represente la situación (como el que se presenta en la figura 1.2), las principales medidas de posición y dispersión, un histograma a partir del lote de datos presentado (como lo que se muestra en la figura 1.3) y las conclusiones que se pueden sacar sobre el desempeño de ese binomio piloto-auto a partir de lo trabajado. (30 min.).
3. Los cursantes deberán formar equipos de 2 o 3 integrantes para realizar la siguiente actividad. A cada equipo se le asignara una tabla Excel con los tiempos realizados por un piloto distinto durante una simulación de carrera (30 min.).

   ACTIVIDAD 1.

   i. Con los datos facilitados en la Tabla Excel realizar un gráfico de lineas que contemple el N° de vuelta y el tiempo de la misma.
   ii. Dada la simulación de carrera, utilizar los comandos necesarios para determinar:
      a. Vuelta más rápida de la simulación.
      b. Vuelta más lenta de la simulación.
      c. Tiempo medio de vuelta por compuesto de neumático.
      d. Entre qué tiempos estuvo la mayor consistencia de vueltas.
      e. Cuál fue el rango de tiempos teniendo en cuenta el promedio.
      f. Desviación estándar correspondiente al lote de datos. ¿Qué representa este valor?
   iii. Realiza una tabla de frecuencias teniendo en cuenta el número de intervalos que considere conveniente y los datos de la simulación, y a partir de ella construye un histograma con su correspondiente polígono de frecuencias.

4. Explicación de en que consiste un boxplot y como realizar uno utilizando Excel, con el ejemplo de simulación de carrera de Max Verstapen. Análisis del Box Plot obtenido (como el de la figura 1.4) para determinar el desempeño del binomio piloto-auto durante la simulación, especialmente haciendo énfasis en el ritmo de carrera y la consistencia de vueltas. (30 min.).
5. Orientaciones para el desarrollo de la actividad entre clases (15 min.).

Observacion: En el caso de que haya cursantes que no cuenten con una versión de Excel del 2016 en adelante, se explicara como realizar el box plot utilizando el software GeoGebra. Esto se debe a que las versiones anteriores no permiten realizar Diagramas de cajas de manera sencilla como si se puede en las versiones mas actuales.

5.5 Segundas dos horas entre clase

Los cursantes deberán realizar la siguiente actividad con los mismos grupos que realizaron la actividad de clase.

ACTIVIDAD ENTRE CLASES 2.

1. A partir de los datos obtenidos en la actividad anterior (de clase) y teniendo en cuenta las medidas de posición y dispersión realizar un diagrama de cajas y bigotes en Microsoft Excel.
   2. Analizar los datos obtenidos a partir del boxplot y escribir una conclusión relacionando los mismos con el desempeño del binomio piloto-auto asignado.
   3. Compara el box plot obtenido con el grafico de lineas y el histograma realizado previamente. ¿Qué características importantes de la simulación pueden apreciarse mejor en cada uno de ellos?. ¿Cuál permite visualizar mejor el ritmo de carrera y la consistencia de vueltas?

Observación: Tanto al final de la segunda clase presencial como en el espacio asignado para la segunda actividad entre clases de la plataforma Moodle se les comunicará a los cursantes que al inicio de la tercera clase presencial deberán exponer por grupos sus desarrollos y conclusiones de lo trabajado en la actividad de la segunda clase y la segunda actividad entre clases (se proyectarán los archivos Excel de cada grupo para que puedan realizar sus exposiciones).

5.6 Terceras dos horas presenciales

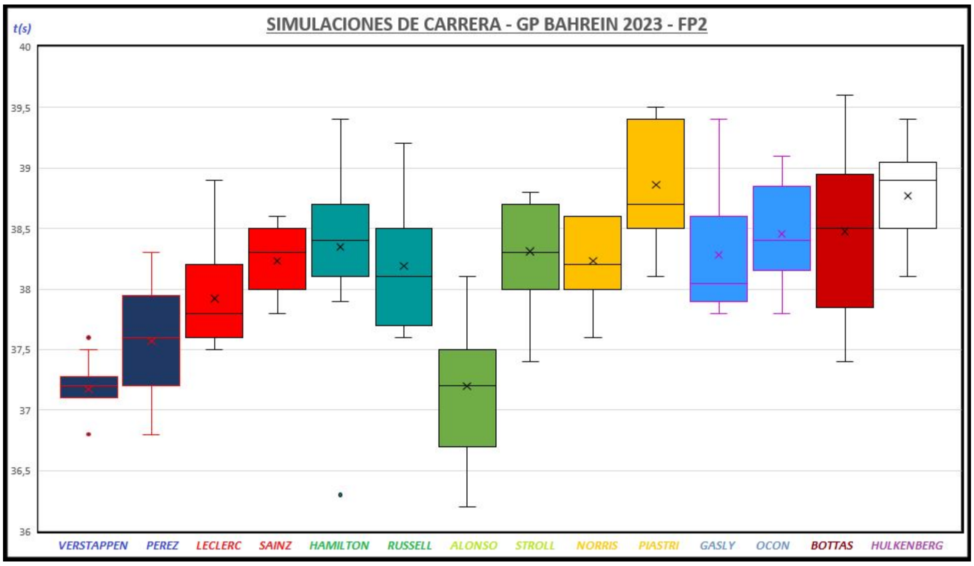
Este encuentro se realizará teniendo en cuenta la siguiente organización con tiempos estimativos sujetos a las diferentes eventualidades que pudieren surgir:

1. Revisión de la ultima tarea asignada (15 min.).
2. Exposición de lo trabajado en grupos en la actividad de la segunda clase presencial y la segunda actividad entre clases (45 min.).
3. Análisis general de los ejemplos de simulación propuestos y realización de una comparación entre ellos para realizar predicciones sobre la carrera. Se presentaran en pantalla todos los diagramas de caja , incluido el de Max Verstapen para comparar el desempeño de cada uno de los binomios piloto-auto durante la Practica 2 (por medio de una imagen similar a la de la figura 1.6) y en base a dicho análisis realizar predicciones sobre los resultados de la carrera (quien ganara, quien quedara en el podio, etc) con participación activa de los cursantes. (30 min.).
4. Comparación de los resultados obtenidos durante la simulación con los tiempos realizados en la carrera por los pilotos, para ver cuanto coinciden las predicciones realizadas con los resultados del Gran Premio. Reflexión sobre la forma de los box plot realizados con los tiempos de la P2 y los realizados con los tiempos de la carrera (que se mostraran en pantalla para dicha comparación). (10 min.).
5. Explicación de la evaluación final del taller (10 min.).
6. Breve charla sobre la experiencia de los cursantes en el taller y si las expectativas fueron cumplidas (10 min.).

5.7 Evaluación final

Los cursantes tendrán un plazo de 1 semana para entregar la evaluación final grupal (con los mismos grupos de trabajo armados anteriormente) cuyas consignas son las siguientes:

Figura 1.6. Box Plot de varios pilotos



1. Organizar en un documento (Word, LaTeX, etc) todo lo desarrollado en el taller a partir de la simulación de carrera del piloto asignado y una conclusión final que contenga el análisis y comparación general de todos los box plot realizados por los diferentes grupos (teniendo en cuenta lo debatido en la ultima clase y las predicciones realizadas).
2. Escribir una reflexión sobre la posible inclusión de una propuesta didáctica similar en alguno de los niveles educativos (secundario, terciario o universitario a elección del grupo) justificando sus opiniones y, en caso de que corresponda, describir de manera general que cambios le realizarían para dicha inclusión.

Se calificará dicha evaluación con una escala numérica del 1 al 100 y se tendrán en cuenta los siguientes criterios de evaluación:

- Presentación en tiempo y forma (20 p.).
- Utilización de Procedimientos matemáticos validos y acordes a lo requerido por las consignas presentadas (20 p.).
- Utilización del vocabulario propio de la estadística y de la Formula 1 (10 p.).
- Manejo del software Excel para la obtención de medidas estadísticas y realización de gráficos (10 p.).
- Organización adecuada del texto con el uso de gráficos e imágenes pertinentes. (10 p.).
- Interpretación de los resultados obtenidos en el contexto de la F1 (15 p.).
- Reflexión final clara y con su debida justificación (correspondiente al inciso 2 de la evaluación) (15 p.).

6. Bibliografía

[1] Ramírez, S. (2022). ¿Qué son y para qué sirven las prácticas libres en Fórmula 1? https://www.sopitas.com/deportes/gran-premio-mexico-que-son-y-para-que-sirven-practicas-libres/
[2] Ahumada, C. (2015). Notas de estadística descriptiva.
[3] Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Pearson Educación.
[4] Guzman, M. d. (2004). Tendencias innovadoras en educación matemática.
[5] Bressan, A. M., & Bressan, O. (2008). *Probabilidad y estadística: cómo trabajar con niños y jóvenes*. Novedades Educativas.
[6] Valverde Berrocoso, J., Garrido Arroyo, M. d. C., & Fernández Sánchez, R. (2010). Enseñar y aprender con tecnologías: un modelo teórico para las buenas prácticas con TIC. *11*(1).
[7] Crippa, A., & Guzner, G. (1998). La evaluación de los aprendizajes. *Matemática. Temas de su didáctica*.
[8] Buscador de Fórmulas. (2024). https://www.desafiandoexcel.com/buscador-de-formulas/

El desarrollo del pensamiento proporcional en la primaria y el ciclo básico del nivel secundario haciendo uso de los registros semióticos de representación y las TIC

Celia Elizabeth Villagra
Universidad Nacional de Salta - Sede Regional Orán
villagracelia@gmail.com

Isabel Hortensia Miguez
Universidad Nacional de Salta - Sede Regional Orán

Reina Ninfa Acosta
Universidad Nacional de Salta - Sede Regional Orán

Edith Marcela Chorolque
Universidad Nacional de Salta - Sede Regional Orán

Resumen. En general los estudiantes del nivel secundario y los ingresantes al nivel superior muestran que tienen dificultades al resolver situaciones vinculadas a la proporcionalidad. Para lograr que haya una buena comprensión conceptual de la proporcionalidad es fundamental desarrollar el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo de los estudiantes desde el nivel primario de escolaridad. De esta manera podrán desempeñarse con fluidez en su vida cotidiana, pero también podrán construir conceptos más complejos en niveles educativos superiores , como por ejemplo las variaciones, la función lineal, las razones de cambios, las derivadas. Por eso en este taller se generará un espacio de reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, articulando el nivel primario y secundario, poniendo en relevancia los diferentes significados de la proporcionalidad: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional, haciendo uso de los distintos registros semióticos de representación e incluyendo la TIC. El taller estará destinado a docentes de 6to. y 7mo. año del nivel primario y ciclo básico del nivel secundario y promoverá el uso del software dinámico GeoGebra que posibilita la coordinación de los diferentes registros y de esta manera se convierte en una potente herramienta para propiciar la significación de conceptos, en este caso de la proporcionalidad que funciona en diferentes registros de representación semiótica.

1. Introducción

1.1 Importancia del taller

Es importante que los estudiantes desarrollen el pensamiento proporcional para que logren la comprensión conceptual de la proporcionalidad y así puedan desempeñarse con fluidez en su vida cotidiana. Pero también para que puedan construir conceptos más complejos en niveles educativos superiores , como por ejemplo las variaciones, la función lineal, las razones de cambios, las derivadas. Por eso es necesario generar un espacio de reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad, que permita poner en relevancia los diferentes significados de la proporcionalidad haciendo uso de los distintos registros semióticos e incluyendo las TIC.

1.2 Fundamentos

En general los estudiantes del nivel secundario y los ingresantes al nivel superior muestran que tienen dificultades al resolver situaciones vinculadas a la proporcionalidad. Para lograr que haya una buena comprensión conceptual de la proporcionalidad es preciso que el estudiante desarrolle el pensamiento proporcional, tal como lo señala Piaget y Inhelder [15] al expresar que para que el estudiante de nivel básico le de sentido y significado a la proporcionalidad es fundamental desarrollar su pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo. Van Dooren et al. [16] consideran que además el estudiante debe tener la habilidad de discriminar entre situaciones proporcionales y no proporcionales como un dominio del conocimiento del razonamiento proporcional.

En la enseñanza de la proporcionalidad es necesario considerar los diferentes significados. Al respecto J. D. Godino et al. [11] expresan que los significados de la proporcionalidad se pueden clasificar según criterios, en particular, el contexto o campo de aplicación y el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas. Algunos contextos de aplicación de las nociones de razón y proporción (vida cotidiana, científico-técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.) deben ser incluidos en las prácticas de resolución de los problemas adecuados al nivel de escolaridad. Los mismos autores también distinguen tres tipos de significados de la proporcionalidad: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional, que deben ser considerados en la enseñanza aprendizaje de este concepto.

En la actualidad el desafío pedagógico en matemática, en la escuela primaria y secundaria, consiste en lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, a partir de situaciones de aprendizaje que permitan desarrollar sus capacidades. En el *Marco nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática* [14], se plantea mejorar el aprendizaje en matemática y desarrollar el potencial del pensamiento lógico matemático, siendo una posibilidad la incorporación de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas. No menos importante resulta, según Duval [10], la interacción entre los distintos tipos de registros: natural, numérico, gráfico, geométrico y algebraico para propiciar aprendizajes significativos de los conceptos y como forma de ligar el tratamiento de la información con la experiencia de los estudiantes. Es necesario que los estudiantes aprendan a usar las Tecnologías de la Información y Comunicación y a interactuar con ellas, de allí que los docentes deban incluir estas nuevas tecnologías en las propuestas educativas. Particularmente el Software dinámico Geogebra permite la coordinación de los diferentes registros y de esta manera se convierte en una potente herramienta para propiciar la significación de conceptos, en este caso de la proporcionalidad que funciona en diferentes registros.

2. Contenidos

- Situaciones aditivas y proporcionales.
- Errores frecuentes de los estudiantes.
- Pensamiento Proporcional: Caracterización.
- Pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo.
- Significado aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional de la proporcionalidad.
- Registros semióticos de representación. Uso de TIC.

3. Requisitos Previos

Ser docente de matemática de 6to o 7mo año del Nivel Primario o docente de matemática del Nivel Secundario. También podría ser un estudiante avanzado del Profesorado de Matemática.

Es necesario que tenga ideas básicas de Proporcionalidad y que tenga conocimiento de las herramientas básicas de GeoGebra.

4. Objetivos

- Reflexionar sobre los errores frecuentes de los estudiantes cuando resuelven situaciones de proporcionalidad.
- Valorar la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento proporcional en los estudiantes.
- Reconocer los diferentes significados de la proporcionalidad.
- Propiciar el uso de registros semióticos y la inclusión de recursos informáticos para potenciar las producciones matemáticas de los estudiantes.
- Repensar la articulación entre el Nivel Primario y Secundario en torno a la enseñanza de la proporcionalidad.

5. Actividades

5.1 Actividades Previas

Contenidos: Situaciones aditivas y de proporcionalidad. Errores frecuentes de los estudiantes cuando resuelven situaciones de proporcionalidad.

ACTIVIDAD PREVIA 1. Los asistentes deberán resolver problemas y luego clasificarlos en aditivos o de proporcionalidad.

Además, deberán proponer una resolución correcta y otra incorrecta que podrían realizar los estudiantes para alguno de los problemas.

a) Una máquina llena 26 cajones de pescado por hora siempre a la misma velocidad. ¿Cuánto tardará para llenar 78 cajones? ¿Y 156? Si la máquina estuvo trabajando 5 horas, ¿Cuántos cajones se llenaron? Expliquen cómo llegaron a su respuesta.
b) Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Empezaron al mismo tiempo, pero Tomás es más rápido. Cuando Pedro ha cargado 5 cajas, Tomás ha cargado 10 cajas. Si Pedro ha cargado 28 cajas, ¿Cuántas cajas ha cargado Tomás?
c) Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad, pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 4 cajas, Tomás ha cargado 10 cajas. Si Pedro ha cargado 20 cajas, ¿Cuántas cajas ha cargado Tomás?
d) El profesor le dijo a Nicolás que hiciese más fotocopias. Nicolás cometió un error y apretó el botón que reduce el tamaño de cada copia a $3/4$. ¿Cuánto debe aumentar Nicolás el tamaño de las copias reducidas para corregir el tamaño original?
e) Las empresas A y B fabrican tornillos a la misma velocidad, pero la empresa B ha empezado antes. Cuando la empresa A ha fabricado 40 cajas, la empresa B ha fabricado 120 cajas. Si la empresa A ha fabricado 120 cajas. ¿Cuántas cajas tendrá fabricada la empresa B?

ACTIVIDAD PREVIA 2. Analizarán un registro de un fragmento extraído de un artículo de Mendoza y Block [13] donde un estudiante explica cómo resolvió una situación de proporcionalidad vinculada a porcentaje y responderán un cuestionario sobre el mismo.

5.2 Primera hora y media presenciales

Contenidos: Errores frecuentes de los estudiantes cuando resuelven situaciones de proporcionalidad. Pensamiento Proporcional: caracterización. Pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo.

ACTIVIDAD 1. Se recuperarán las producciones de la actividad previa y se caracterizarán los errores frecuentes.

A través de una presentación de Power Point se definirá y caracterizará el pensamiento proporcional.

En grupo se resolverán y analizarán actividades destinadas a los estudiantes de primaria. Un grupo resolverá una actividad con dos tareas donde se utiliza el pensamiento proporcional cualitativo y el otro grupo una actividad con dos tareas donde se utiliza el pensamiento proporcional cuantitativo.

Ejemplo de una de las tareas de las actividades, propuesta por Ruiz y Valdemoros [12].

> *El dibujo que está abajo es la casa de Antonio (figura 2.1). El sacó una copia fotostática en reducción. De los dibujos que están más abajo marca la letra que corresponda a la reducción que obtuvo.*
> *Escribe paso a paso que hiciste para resolverlo.*

Se realizará una puesta común eligiendo los representantes de algunos grupos para la socialización.

Los talleristas sintetizarán las producciones y señalarán la diferencia entre pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo y las actividades que les corresponden. Además, se mostrará una posible secuencia de tipo de pensamiento y actividades para ir articulando primaria con nivel secundario.

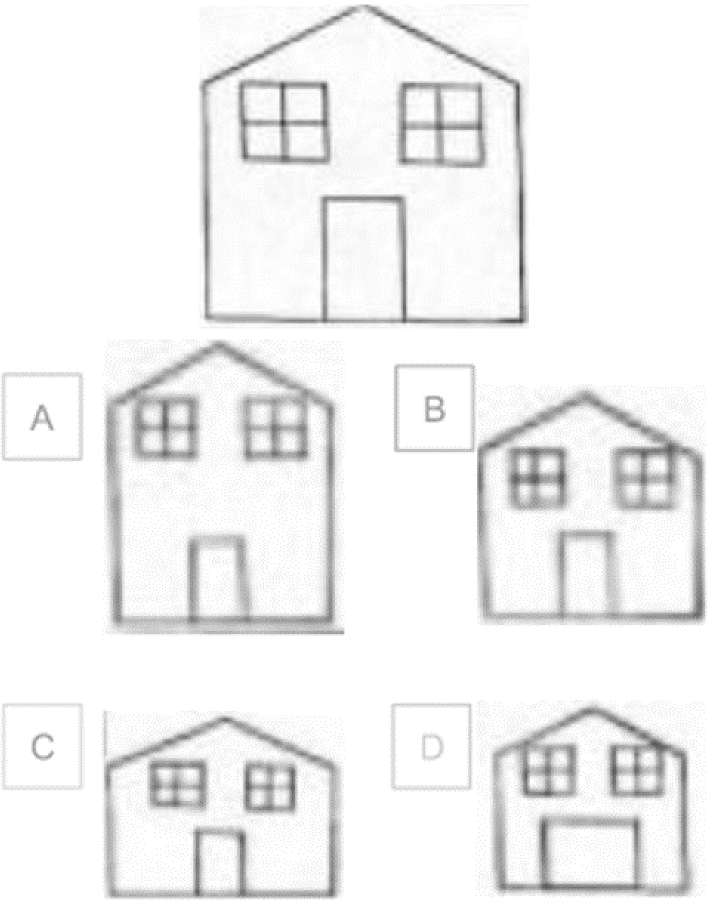
5.3 Primeras dos horas entre clases

ACTIVIDAD ENTRE CLASES 1. Se les proporcionará el artículo "*Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad*" de J. D. Godino et al. [11] donde se clasifican los significados de proporcionalidad.

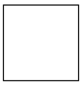
ACTIVIDAD ENTRE CLASES 2. Deberán analizar actividades reconociendo el significado de proporcionalidad que enfatiza, según el texto de J. D. Godino et al. [11] y los contenidos matemáticos que subyacen. Las actividades propuestas están destinadas a nivel primario y secundario. Además, deberán resolver una de las actividades que analizan.

Ejemplo de una actividad que analizarán: (la siguiente actividad, *Problema 1*, fue extraída de Atela et al. [9]).

Figura 2.1



Problema 1: El siguiente dibujo es un cuadrado:



a) Completa en cada caso el dato faltante:

Longitud del lado del cuadrado(cm)	0	2	4	7		12	15
Perímetro del cuadrado(cm)		8			40		

b) Si se duplica un par de lados, se obtiene un rectángulo. ¿El perímetro de la nueva figura se duplica? Justifiquen.
c) Si se duplican los lados del cuadrado original, se obtiene otro cuadrado. ¿El cuadrado de la nueva figura se duplica? Justifiquen.
d) Si se triplican los lados del cuadrado original, se obtiene otro cuadrado. ¿El perímetro de la nueva figura se triplica? Justifiquen.
e) A partir de lo analizado, ¿En qué casos el perímetro es directamente proporcional a la longitud del lado?

5.4 Segunda hora y media presencial

Contenidos: Significados de la proporcionalidad. Registros semióticos.

ACTIVIDAD 2. Se recuperará la resolución de la actividad entre clases solicitando a dos asistentes que comenten sus resoluciones. Se realizará una síntesis sobre los significados de la proporcionalidad propuestos por J. D. Godino et al. [11].

A través de un Power Point se desarrollarán los registros de representación Semiótica de Duval [10].

Se hará un breve repaso del uso de herramientas de Geogebra.

En grupos se resolverá una actividad para primaria con Geogebra. Además se deberá identificar tipo de pensamiento, contenidos, significado y registros.

Ahora analicen el archivo de GeoGebra "`problema 1`" y sigan las instrucciones: (Actividad propuesta por Atela et al. [9]).

a) Muevan el punto a del deslizador, ¿Qué observan?, ¿Qué se modifica y qué se mantiene constante?, ¿Por qué creen que ocurre esto?
b) ¿Qué significado tiene el valor de a?
c) ¿Qué sucede cuando $a = 0$? ¿Coincide con el valor de la tabla que completaron en el problema 1a)?
d) Ahora muevan el punto A, ¿Qué se modifica y qué se mantiene constante? ¿Por qué consideran que ocurre esto?
e) Ahora muevan el punto B, ¿Qué se modifica y qué se mantiene constante? ¿Por qué consideran que ocurre esto?
f) Utilizando la Vista Algebraica y/o la vista gráfica completen la tabla:

Longitud del lado del cuadrado	3					
Perímetro del cuadrado	12	36			80	
Área del cuadrado	9		100	900		1

g) A medida que aumenta la longitud del lado del cuadrado, su perímetro aumenta, ¿Aumenta de manera directamente proporcional?
h) A medida que aumenta la longitud del lado del cuadrado, su área aumenta, ¿Aumenta de manera directamente proporcional?

Se realizará la puesta en común

Un tallerista realizará un cierre mostrando actividades con registros variados para primaria (6to y 7mo) señalando el valor didáctico de cada una.

5.5 Segundas dos horas entre clases

ACTIVIDAD ENTRE CLASES 3. Se les proporcionará un archivo con los contenidos de proporcionalidad de 5to. y 7mo. año de primaria establecidos en el diseño curricular de la provincia de Salta (discriminados por ejes). De la misma manera también estará disponible un archivo para ciclo básico del nivel secundario.

Se les preguntará sobre los contenidos que realmente se están abordando en cada nivel y los registros semióticos que se están utilizando.

ACTIVIDAD ENTRE CLASES 4. Se proporcionará dos archivos pdf que muestran las actividades propuestas por dos libros de primer año del secundario. Deberán analizar y responder contenidos, tipo de pensamiento y registro semiótico. Además deberán reconocer si las actividades permiten la conversión de registros.

5.6 Tercera hora y media presencial

ACTIVIDAD 3. Se recuperará las producciones de las actividades entre clases. Dando la posibilidad de que los cursantes comenten sus resoluciones.

Un tallerista realizará una síntesis de la actividad presentando a través de un Power Point reflexiones sobre la importancia del significado algebraico-funcional en la escuela secundaria.

En grupos resolverán actividades en GeoGebra destinadas a primer y segundo año de la escuela secundaria.

Un ejemplo de actividad es la siguiente:

Actividad: Observa las siguientes tablas que representan la relación entre dos magnitudes.

Cantidad de envases (x)	300	120	80	60	30	12
Contenido de cada envase en litros (y)	0,2	0,50	0,75	1	2	5

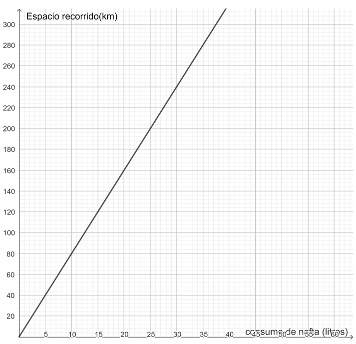
Cantidad de alfajores (x)	6	12	18	3	2	1
Precio en $ (y)	450	900	1350	225	150	75

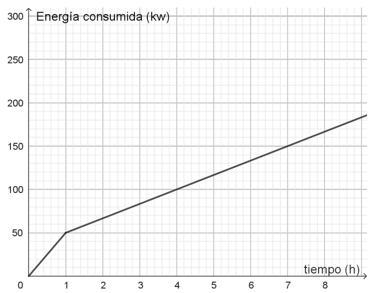
Número de personas (x)	2	3	5	7	8	10
Cantidad de harina en gramos (y)	100	150	250	350	400	500

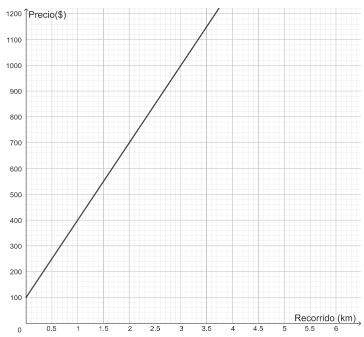
Cantidad de alfajores por caja (x)	10	20	30	5	60
Cantidad de cajas (y)	6	3	2	12	1

Tiempo en horas (x)	0,5	1	3	5	6
Distancia recorrida en km (y)	40	80	240	400	480

1) Decide cuáles corresponden a relaciones de proporcionalidad directa. Encuentra su constante de proporcionalidad. Justifica.
2) Representa en Geogebra los puntos de cada tabla. (realiza una gráfica por ventana)
3) Si correspondiera une los puntos.
4) ¿Qué características tienen las gráficas de las relaciones que representan proporcionalidad directa? ¿son funciones? justifica.
5) Escribe el registro algebraico de las relaciones que corresponden a proporcionalidad directa.







6) ¿Cuál o cuáles corresponden a una proporcionalidad directa? Justifica.
7) Muestra la/s tabla/s y la expresión algebraica asociada a la relación que corresponda a una proporcionalidad directa.
8) Se analizará en ellas los contenidos, registros y valor didáctico y posteriormente se realizará la puesta en común.
9) Se realizará una síntesis final mostrando contenidos, tipo de pensamiento, registros y tipo de actividades sugeridas por nivel para lograr la articulación entre niveles y el desarrollo del pensamiento proporcional.

5.7 Evaluación final

1. Deberán responder un cuestionario referido a los contenidos desarrollados en el taller. Por ejemplo
   - ¿Cuáles son los tipos de pensamientos proporcionales ? Explique las características de las actividades que desarrollan cada tipo de pensamiento.
   - ¿En qué consiste "la regla de tres simple"? ¿cuáles son los obstáculos que genera? Muestre un ejemplo que el estudiante podría resolver aplicando la regla de tres simple y redacte al menos dos líneas acerca de cómo Ud. interactuaría con el estudiante para trabajar sobre ese error.
   - ¿Se podría calcular porcentajes sin utilizar la regla de tres simple? Explique.
   - ¿Por qué es importante incluir el uso de GeoGebra en la enseñanza de proporcionalidad?

- ...

2. Deberá resolver una actividad de proporcionalidad reconociendo:
   - Contenidos. (tener en cuenta diseño curricular)
   - Tipo de pensamiento proporcional.
   - Significado de proporcionalidad que subyace.
   - Registro semiótico.
   - Transformaciones y conversiones de registros.
   - Año de Primaria o Secundaria al que podría estar dirigido.

6. Bibliografía

[9] Atela, M. A., Fernández, J. P., & Vila, M. (2019). Articulación entre nivel primario y secundario. Una experiencia alrededor de la proporcionalidad mediada por TIC. *Actas V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales*.

[10] Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*.

[11] Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., & Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad [J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.)]. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, 1-13. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino_beltran.pdf

[12] Ruiz, E., & Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2). http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S1665-24362006000200007&lng=es&nrm=iso&tlng=es

[13] Mendoza, T., & Block, D. (2013). Si 100 % es todo, ¿cuánto es 120 %? Variables didácticas en situaciones de porcentaje. En *Matemática en la escuela primaria: saberes y conocimientos de niños y adolescentes* (pp. 169-194). Ed. Paidos.

[14] *Marco nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática* (1.ª ed.). (2019). Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

[15] Piaget, J., & Inhelder, B. (1978). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En J. Delval (Ed.), *Lecturas en Psicología del niño* (I, pp. 70-119). Alianza Editorial.

[16] Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86.

Autovalores, autovectores y transformaciones: una mirada geométrica

Marcos Darío Chañi
Universidad Nacional de Salta
mat.marcos2.0@gmail.com

Silvia Noemí Romero
Universidad Nacional de Salta

Marcela Daniela Gutierrez
Universidad Nacional de Salta

Noelia Adriana Melisa Velasquez
Universidad Nacional de Salta

Resumen. Dentro de la enseñanza del matemática, más precisamente el álgebra lineal uno de los tópicos fundamentales el concepto de «Transformación Lineal», y a veces por razones de tiempo no se puede profundizar en algunos temas complementarios. Es así que se propone en este taller resignificar los temas de «Transformaciones Lineales, autovalor y autovector» entre otros, para abordar un nuevo tema que son las «Transformaciones ortogonales», así mediante la ayuda del álgebra lineal se espera que los alumnos logren interpretar estos conceptos de manera gráfica y geométrica, para que no sean sólo un conjunto de conocimientos abstractos. Este trabajo ofrece una alternativa de enseñanza para los conceptos de diferentes transformaciones. El taller es un espacio para realizar gráficos dinámicos con GeoGebra, acompañado de situaciones de análisis y de debate, con la intención de realizar actividades matemáticas mediadas por un instrumento tecnológico donde el eje central es el concepto matemático, y de esta manera superar las dinámicas tradicionales. Así se propone una nueva forma de emprender las prácticas educativas contextualizas en los actuales paradigmas educativos.

Palabras clave — GeoGebra, Álgebra, Trasformaciones Ortogonales, Matrices, Autovalor, Autovector.

1. Introducción

1.1 Importancia del Taller

Dentro de la enseñanza del matemática, más precisamente el álgebra lineal uno de los tópicos fundamentales el concepto de «Transformación Lineal», y a veces por razones de tiempo no se puede profundizar en algunos temas complementarios. Es así que se propone en este taller resignificar los temas de «Transformaciones Lineales, autovalor y autovector» entre otros, para abordar un nuevo tema que son las «Transformaciones ortogonales», así mediante la ayuda del álgebra lineal se espera que los alumnos logren interpretar estos conceptos de manera gráfica y geométrica, para que no sean sólo un conjunto de conocimientos abstractos. Este trabajo ofrece una alternativa de enseñanza para los conceptos de diferentes transformaciones. El taller es un espacio para realizar gráficos dinámicos con GeoGebra, acompañado de situaciones de análisis y de debate, con la intención de realizar actividades matemáticas mediadas por un instrumento tecnológico donde el eje central es el concepto matemático, y de esta manera superar las dinámicas tradicionales. Así se propone una nueva forma de emprender las prácticas educativas contextualizas en los actuales paradigmas educativos.

1.2 Fundamentos

En relación al marco pedagógico se va a trabajar a través del aprendizaje secuencial y colaborativo, mediante un "conocimiento espiralado", es decir el alumno construye y/o afirma conceptos por medio de conceptos ya aprendidos, de manera que realiza un reordenamiento de sus ideas y los confirma. Es por ello que se propone un taller, ya que las actividades pueden realizarse en forma individual o colectiva, la evaluación de las actividades es realizada por los integrantes, de esta manera se ubica al alumno para que sea crítico tanto con su trabajo como el de sus pares.

Se elaborará una guía para los 3 encuentros, en las cuales se proponen actividades que se realizarán en forma grupal o individual en forma alternada. Las actividades se llevarán a cabo en tres instancias las cuales habrá:

- Un desarrollo matemático en función a lo que se pide en las guías.
- Un trabajo en la máquina mediante el uso del Software GeoGebra.
- Una puesta en común para debatir sobre lo realizado en las instancias anteriores.

Los nuevos escenarios educativos brindan la posibilidad de incorporar recursos vinculados con las TIC, así también cada día aumenta la demanda de la formación continua en relación a las nuevas corrientes tecnológicas-matemáticas por parte de los docentes, esto conlleva a generar espacios de aprendizaje en donde puedan elaborar y llevar a cabo propuestas educativas que involucren las TIC en la enseñanza de la matemática.

El presente escrito describe un taller de actividades mediante el uso del software GeoGebra, con la intención de contribuir a la formación profesional continua en el campo de la matemática y su enseñanza. La elección del software GeoGebra, se debe no solo a sus potencialidades matemáticas y didácticas, sino también a que es de uso libre.

Hoy en día el desafío de enseñar matemática implica que los docentes no solo superen algunas tradiciones que provienen de nuestras biografías escolares y formativas, sino también el replantear el uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje. A partir de esto se realiza una propuesta para estudiantes avanzados y docentes de matemática, con la intención de realizar actividades matemáticas mediadas por un instrumento tecnológico con eje central el concepto matemático, y de esta manera superar las dinámicas tradicionales.

Uno de los aspectos del taller es la visualización, en relación a ella distintos investigadores Castro y Castro [22] y Cantoral y Montiel [23] acuerdan que al realizar una actividad de visualización se requiere la utilización de nociones y conceptos matemáticos para poder ser interpretada de forma adecuada. Es decir, la capacidad de visualizar un concepto matemático o un problema requiere de la habilidad para interpretar y entender la información de tal, manipularlo mentalmente y así expresarlo en un soporte material. Así también cuando se usa la representación gráfica de un concepto matemático como herramienta para interpretar otros o resolver problemas, la visualización no es el fin en si mismo sino un medio para llegar a la compresión de propiedades y de relaciones entre distintos conceptos. Según Castro y Castro [22, p. 103], dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar cono determinadas propiedades.

Debe remarcarse que GeoGebra permite otros modos de hacer en la clase ya que los participantes pueden enfocar su atención en procesos de análisis, que permiten la modelización, la toma de decisiones, el razonamiento y la resolución de situaciones, tal como lo plantean Arcavi y Hadas [24] (citado en Santos Trigo, 2007, p. 39), los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permite transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones.

2. Contenidos

Interpretación geométrica de transformaciones lineales, autovalor y autovector de una transformación lineal. Transformaciones ortogonales.

3. Requisitos Previos

Conceptos básicos de un curso de álgebra lineal. Especialmente Transformaciones lineales. Autovalor y autovector.

4. Objetivos

- Valorizar el concepto de transformación lineal, autovalor y autovector a través de su interpretación geométrica.
- Facilitar el aprendizaje de las diferentes transformaciones ortogonales, a través de la visualización gráfica. mediante el Software GeoGebra.
- Realizar representaciones gráficas dinámicas de los conceptos descritos anteriormente.
- Generar en los participantes nuevas ideas de cómo utilizar los recursos vistos, en su práctica docente.

5. Actividades

5.1 Actividades previas

Lectura del material bibliográfico sobre el tema «Transformaciones lineales, autovalores y autovectores» sumado a los ejercicios de identificar si una transformación es lineal o no, y sobre autovalores y autovectores. Se espera que mediante las actividades los participantes refresquen dichos contenidos que fueron impartidos en un curso de álgebra lineal.

5.2 Primera hora y media presenciales

Los cursantes del taller a partir de la «Definición de Transformación Ortogonal», mediante razonamientos lógicos y deductivos deberán encontrar las condiciones para ser una transformación ortogonal y de esta manera hallar las dos maneras de expresar una transformación ortogonal en forma matricial, a las que llamaremos de primera y segunda especie. Cuando los cursantes lo requieran contarán con la guía de los docentes a cargo para poder evacuar dudas o confirmar si sus razonamientos son correctos y poder validarlos.

5.3 Primeras dos horas entre clases

En este espacio se dará material tanto teórico como práctico, para el uso de GeoGebra. En relación al material teórico se propone un resumen de cómo introducir matrices en el software GeoGebra, para luego pasar a las actividades donde deberán introducir las diferentes matrices que se proponen. Los archivos se guardarán, para en forma posterior ser enviados mediante la plataforma para su control por parte de los responsables.

5.4 Segundas dos horas presenciales

En las segunda dos horas presenciales, los cursantes del taller deberán deducir la expresión matricial de diferentes transformaciones rígidas en $\mathbb{R}^3$ es decir en el plano (traslación, simetría central, simetría axial, etc.) con el sustento de un un marco gráfico, para ello deberán hacer uso del concepto de autovalor y autovector de una transformación lineal. Dichas actividades estarán guiadas mediante preguntas y/o observaciones de manera que los participantes del taller puedan razonar y debatir ya sea de manera individual o grupal. En todo el proceso de deducción y discusión los docentes responsables podrán guiar a los participantes para que logren hallar las expresiones matriciales de cada transformación rígida.

5.5 Segundas dos horas entre clases

Este espacio estará dedicado para que los participantes puedan validar mediante el Software GeoGebra que las transformaciones halladas son correctas o no. Para ello se les pedirá en GeoGebra en la ventada 2D:

- Construir una polígono (por ejemplo un triángulo).
- Ingresar la matriz de la transformación correspondiente (se aclara que en las primeras horas entre clases, sección 3.5.3, los participantes ya aprendieron a cargar matrices en GeoGebra).
- Encontrar mediante la matriz ingresada, los transformados de los vértices de la figura y construir en nuevo polígono con los puntos resultantes de aplicar dicha transformación.
- Comprobar, validar o refutar que dicha es la correcta.

5.6 Terceras dos horas presenciales

En las terceras y últimas dos horas presenciales, los cursantes nuevamente deberán deducir la expresión matricial de las transformaciones estudiadas en las dos horas presenciales anteriores, sección 3.5.2, pero en este caso para el espacio $\mathbb{R}^3$. Incentivando el poder de generalización de los participantes. Dichas actividades nuevamente estarán guiadas mediante preguntas y/o observaciones de manera que los participantes puedan generalizar el método encontrado en la clase anterior. Así también en todo el proceso de deducción y discusión los docentes responsables podrán sugerir a los participantes pensar en cómo generalizar las expresiones matriciales de cada transformación rígida.

5.7 Evaluación final

La evaluación será mediante la entrega de archivos de GeoGebra, para ello a participantes se les dará una transformación en $\mathbb{R}^3$ a realizar, la cual deberán realizar la matriz de transformación y luego ingresarla en el Software. En forma posterior se le pedirá que verifiquen que una figura (polígono o poliedro) se transforma de manera correcta mediante el uso de la matriz ingresada.

6. Bibliografía

[17] Burgos, J. d. (1993). *Álgebra Lineal*. Editorial McGraw-Hill.
[18] Anton, H. (1998). *Introducción al Álgebra Lineal* (2.ª ed.). Editorial Limusa.
[19] Kolman, B., & Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal*. Editorial Pearson.
[20] Benitez, R. (2015). *Geometría Vectorial*. Editorial Trillas.
[21] Ferragina, R., & Ammann, S. (2012). *GeoGebra entra al aula*. Editorial Miñi y Dávila.
[22] Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Horsori.
[23] Cantoral, R., & Montiel, G. (2002). Desarrollo del pensamiento matemático: el caso de la visualización de funciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.
[24] Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*, 25-15.
[25] Reina, G. (2012). *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación: La clase no finaliza en el aula*. Ugerman Editor.
[26] Villella, J. (1999). *Sugerencias para la clase de Matemática*. Editorial Aique.

De la ecuación cuadrática a la cúbica: una introducción a los números complejos

Marcos Darío Chañi
Universidad Nacional de Salta. Instituto Jean Piaget
mat.marcos2.0@gmail.com

Silvia Noemí Romero
Universidad Nacional de Salta

Marcela Daniela Gutierrez
Universidad Nacional de Salta

Noelia Adriana Melisa Velasquez
Universidad Nacional de Salta

Resumen. Las matemáticas comenzaron como una forma de cuantificar nuestro mundo: medir el terreno, predecir el movimiento de los planetas, registrar el comercio, etc. Pero en un momento de la historia se planteo un problema irresoluble: la resolución a la ecuación cúbica. El problema central del taller se plantea a partir de la resolución de un tipo especial de ecuación cúbica, mediante la resolución de ecuaciones cuadráticas. Para esto se plantea un estudio de esta solución deteniéndonos en las sustituciones que allí se presentan para así dotar de sentidos los procesos inmersos en esta y así elaborar los significados. Se pretende plantear un conjunto de estrategias en el proceso de resolver un problema para lo cual nos centraremos en un principio en un marco geométrico, así un individuo puede explotar analogías, introducir elementos auxiliares en el problema o trabajar problemas auxiliares, descomponer o combinar algunos elementos del problema, dibujar figuras, variar el problema o trabajar en casos específicos, para luego abandonar el marco geométrico que lo generó y poder llevar el problema a un nuevo marcó algebraico. Es aquí donde se tendrá la necesidad de la creación de nuevos números los que conocemos como números complejos.

Palabras clave — Ecuación cuadrática, Ecuación cúbica, Marco geométrico, Marco algebraico, Historia.

1. Introducción

1.1 Importancia del Taller

Las matemáticas comenzaron como una forma de cuantificar nuestro mundo: medir el terreno, predecir el movimiento de los planetas, registrar el comercio, etc. Pero en un momento de la historia se planteo un problema irresoluble: la resolución a la ecuación cúbica. El problema central del taller se plantea a partir de la resolución de un tipo especial de ecuación cúbica, mediante la resolución de ecuaciones cuadráticas. Para esto se plantea un estudio de esta solución deteniéndonos en las sustituciones que allí se presentan para así dotar de sentidos los procesos inmersos en esta y así elaborar los significados. Se pretende plantear un conjunto de estrategias en el proceso de resolver un problema para lo cual nos centraremos en un principio en un marco geométrico, así un individuo puede explotar analogías, introducir elementos auxiliares en el problema o trabajar problemas auxiliares, descomponer o combinar algunos elementos del problema, dibujar figuras, variar el problema o trabajar en casos específicos, para luego abandonar el marco geométrico que lo generó y poder llevar el problema a un nuevo marcó algebraico. Es aquí donde se tendrá la necesidad de la creación de nuevos números los que conocemos como números complejos.

1.2 Fundamentos

En ocasiones, el estudio de un determinado tema aparece disgregado en distintos lugares en los que se abordan diferentes aspectos del mismo, por ello es conveniente realizar una síntesis posterior para adquirir una visión más completa del problema y de sus resultados. Se trata, pues, de un mismo capítulo en la historia de la matemática pero que, por diversas razones, se aborda de manera fraccionada y que requiere por tanto volver a contemplar conjuntamente. Un ejemplo de lo anterior sucede con las ecuaciones aparece

- por un lado la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado
- por otro, la factorización de polinomios
- y en un lugar distinto los números complejos, que suelen introducirse de manera que se menciona el enunciado del teorema funda- mental del álgebra y algunas propiedades en relación con las raíces imaginarias.

Otras veces se presenta, sin embargo, una situación en cierto modo inversa de la anterior, que tiene lugar cuando unidades temáticas independientes, pertenecientes incluso a distintas ramas de la matemática, se utilizan para intentar resolver un mismo problema. Donde la geometría, y el análisis, son útiles para ello. Como es sabido, efectivamente la geometría ha estado presente en la resolución de ecuaciones frecuentemente. Basta con citar al matemático árabe Al-Khuwarizmi, quien resuelve geométricamente ecuaciones de segundo grado, como aparece en su obra *Sobre el cálculo mediante la reducción y la restauración*, C. B. Boyer [27], o tener en cuenta que las identidades algebraicas que utiliza Cardano para la resolución de la ecuación cúbica están basadas en razonamientos geométricos, como así mismo ha sucedido durante muchos siglos con otras identidades.

En la línea de lo anterior hay que destacar también la importante contribución de Descartes, quien en su trabajo se ocupa de «cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de la geometría». Es decir, se unifica el álgebra con la geometría, dando lugar al nacimiento de la geometría analítica. De esta manera, y mediante el empleo de coordenadas, se pueden trasladar determinados problemas geométricos al terreno algebraico y recíprocamente, identificándose ecuaciones a formas geométricas. En la resolución de ecuaciones nos referimos a los trastornos que ocasiona en los alumnos el «automatismo» en la resolución de problemas, en nuestro caso, en lo que afecta al dibujo de una construcción geométrica, su discusión, su generalización, etc.

Entendemos que el pensamiento es sobre todo una forma de reflexión activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos, el cuerpo (a través de la percepción, gestos, movimientos, etc.), el lenguaje, los signos, etc. Así el aprendizaje es visto como la actividad a través de la cual los individuos entran en relación no solamente con el mundo de los objetos culturales, sino con otros individuos y adquieren, en el seguimiento común del objetivo y en el uso social de signos y artefactos, la experiencia humana.

2. Contenidos

Resolución de ecuación cúbica. Introducción a los números complejos.

3. Requisitos Previos

Resolución de ecuación cuadrática. Resolución de ecuaciones bicuadráticas. Resolución de sistemas de ecuaciones mixtos. Nociones de geometría básica.

4. Objetivos

- Valorizar y resignificar la resolución de ecuaciones cuadráticas, mediante la utilización de un marco geométrico.
- Utilizar la resolución de ecuaciones cuadráticas para la resolución de ecuaciones cúbicas mediante la generalización del método geométrico.
- Generar la importancia en la necesidad de definir e introducir los números complejos, para la resolución de ecuaciones.

5. Actividades

5.1 Actividades previas

Lectura del material bibliográfico histórico sobre el tema «Ecuación cuadrática», «Introducción histórica sobre la resolución de ecuaciones cuadráticas». Se espera que mediante las actividades los participantes refresquen dichos contenidos que fueron impartidos en un curso de álgebra e historia de la matemática.

5.2 Primera hora y media presenciales

En este espacio en un principio se les planteará a los cursantes del taller en un principio resolver una ecuación cuadrática por el método que consideren más conocido o más relevante. Para luego dar a conocer en forma de debate general las diferentes formas de resolución de la ecuación, encontrando diferencias y semejanzas entre las diferentes resoluciones. En forma posterior se les pedirá resolver la misma ecuación mediante el método de «completar cuadrados», para luego nuevamente poner en debate el procedimiento realizado. Por último se les brindará a los participantes material de manipulación (cartulinas con determinadas formas) para que expliquen de manera geométrica en qué se basa o sustenta el método de resolución anterior (completar cuadrados).

5.3 Primeras dos horas entre clases

Lectura del material bibliográfico histórico sobre el tema «Ecuación cúbica», «Introducción histórica sobre la resolución de cúbicas».

5.4 Segundas dos horas presenciales

En este espacio se pretende trabajar con la resolución de las ecuaciones cúbicas reducidas de la forma $x^3 + ax = b$, para ello se explora el planteo de completar cuadrados en tres dimensiones. De manera que en lugar de completar el cuadrado, los cursantes deberán completar el cubo apoyados nuevamente en un marco geométrico en tres dimensiones. Es aquí donde entra en juego la resolución de sistemas de ecuaciones. Lo cual llevará a los participantes a plantear una ecuación bicuadrática, que a su vez impulsa la resolución de una ecuación cuadrática. Ver sección 4.5.2.

5.5 Segundas dos horas entre clases

Se les pedirá a los participantes de taller, la resolución de una ecuación cúbica reducida como así también material bibliográfico histórico sobre la generalización del método de resolución Cardano de ecuaciones cúbicas no reducidas, es decir de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Ver sección 4.5.3.

5.6 Terceras dos horas presenciales

Este espacio se abordarán ecuaciones cúbicas que no pueden resolverse fácilmente de la forma usual. En donde al aplicar el algoritmo del método Cardano y realizar planteo geométrico del problema se obtienen raíces cuadradas de números negativos. Donde si bien la derivación y el armado del cubo funciona parcialmente, la ecuación cuadrática resultante no brinda solución. Es así que los participantes tendrán la necesidad de impulsar la creación de un nuevo conjunto numérico (el conjunto de los números complejos), lo cual nos brinda la solución de la ecuación la cual para nuestra sorpresa es real. Donde el método Cardano funciona, pero se debe abandonar la prueba geométrica que la generó en un principio, así los números complejos deben existir como un recurso intermedio para la solución real. Ver sección 4.5.2.

5.7 Evaluación final

Se les presentará a los participantes realizar un resumen de lo trabajado en el taller y una ecuación cúbica para la resolución de la misma, utilizando todo lo trabajado en el taller.

6. Bibliografía

[27] Boyer, C. B. (1986). *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza.

[28] Etayo Miqueo, J. J. (1986). El álgebra del cinquecento. En *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

[29] Peralta, J. (1988). Resolución gráfica de ecuaciones algebráicas. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemática*.
[30] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., & Trejo, C. (1963). *Análisis Matemático* (Vol. 1). Editorial Kapeluz.
[31] Contreras, J., & del Pino, C. O. (2004). Sobre la ecuación cúbica. *Revista del Instituto de Matemática y Física*.

Geometría: algunos conceptos relacionados con Olimpiada Matemática Argentina

Antonio Noé Sángari
Universidad Nacional de Salta
jem@exa.unsa.edu.ar

Veronica Flores Rocha
Colegio Italo-argentino Bilingüe Bicultural "Dante Alighieri"

Silvia Ester Coria
Instituto de Educación Media "Dr. Arturo Oñativia"

Nadia Ghiglia

Resumen. Este trabajo se enfoca en la importancia de un taller para docentes de educación secundaria en Argentina que participan en la Olimpiada Matemática Argentina. El taller tiene como objetivo proporcionarles herramientas y enfoques novedosos para guiar a sus estudiantes en la resolución de problemas geométricos, fortaleciendo así los conceptos geométricos y mejorando la calidad educativa. Se basa en fundamentos matemáticos, didácticos y pedagógicos, que incluyen una comprensión profunda de la geometría, la resolución de problemas desafiantes y un enfoque pedagógico centrado en el estudiante. Los temas abordados en el taller incluyen figuras geométricas básicas, cuadriláteros convexos, la circunferencia, la semejanza y las razones trigonométricas. La metodología se basa en plantear situaciones problemáticas para promover el aprendizaje activo y el razonamiento. Las actividades previas incluyen recopilar material bibliográfico y realizar un cuadro comparativo de los conceptos y dificultad de los textos. Durante el taller, se presentan recursos multimediales y material bibliográfico relacionado con la Olimpiada Matemática. Los participantes comparten sus cuadros comparativos y se fomenta la discusión. En resumen, este taller busca fortalecer la capacidad de los docentes para guiar a sus estudiantes en la resolución de problemas geométricos y promover una educación de calidad en matemáticas.

Palabras clave — Taller, Docentes, Geometría, Olimpiada Matemática, Resolución de problemas.

1. Introducción

1.1 Importancia del taller

Cada año, un gran número de estudiantes de diversas instituciones educativas de Argentina participan en la Olimpiada Matemática Argentina, la cual se lleva a cabo en todo el territorio del país. Esta competencia tiene como objetivo abordar contenidos matemáticos a través de problemas desafiantes, cuya resolución requiere el adecuado manejo de conceptos básicos entrelazados entre sí.

Los docentes de educación secundaria desempeñan un papel fundamental en la construcción de estas perspectivas diferentes y diversas. Su participación en este taller les brindará herramientas y enfoques novedosos para colaborar con sus estudiantes en la resolución de problemas geométricos, con el fin de mejorar la calidad educativa y fortalecer los conceptos geométricos en sus alumnos.

Durante el taller, los docentes tendrán la oportunidad de adquirir miradas enriquecedoras que les permitirán abordar la enseñanza de la geometría desde diferentes ángulos. Además, se les proporcionarán estrategias de resolución de problemas, lo que les permitirá guiar a sus estudiantes de manera efectiva en el desarrollo de habilidades matemáticas y en la comprensión de conceptos geométricos más profundos.

Al promover la participación de los docentes en este taller, se busca fomentar una educación de calidad y un mayor afianzamiento de los conocimientos geométricos en los estudiantes. La resolución de problemas de geometría no solo implica la aplicación de conceptos teóricos, sino también el desarrollo de habilidades analíticas y estratégicas, lo cual contribuye al crecimiento integral de los alumnos.

En resumen, la participación de los docentes de secundaria en este taller les proporcionará herramientas valiosas y diferentes perspectivas para colaborar con sus estudiantes en la resolución de problemas geométricos. Esto no solo mejorará la calidad educativa, sino que también fortalecerá los conceptos geométricos en el alumnado, brindándoles una base sólida para su desarrollo académico y personal.

1.2 Fundamentos

Las Olimpíadas Matemáticas, incluyendo la Olimpíada Matemática Argentina, se basan en fundamentos matemáticos, didácticos y pedagógicos para promover el aprendizaje y la excelencia en matemáticas, especialmente en el campo de la geometría. Estas bases son las siguientes:

1.2.1 Fundamentos Matemáticos

Las Olimpíadas Matemáticas, incluyendo la geometría, se basan en una sólida comprensión de los conceptos matemáticos. Los participantes deben tener un conocimiento profundo de la geometría euclidiana, incluyendo teoremas, axiomas, propiedades y demostraciones. También es importante tener habilidades en cálculo y álgebra, ya que la geometría a menudo se relaciona con estos campos.

1.2.2 Fundamentos Didácticos

Las Olimpíadas Matemáticas se centran en la resolución de problemas como medio para promover el aprendizaje matemático. La resolución de problemas desafiantes estimula el razonamiento lógico, la creatividad y el pensamiento crítico. Los problemas geométricos presentados en las olimpíadas suelen requerir una comprensión profunda de los conceptos geométricos y la capacidad de aplicarlos en situaciones no triviales. Además, estos problemas suelen fomentar la visualización, la manipulación de figuras y la deducción lógica.

1.2.3 Fundamentos Pedagógicos

Las Olimpíadas Matemáticas promueven un enfoque pedagógico centrado en el estudiante, en el cual se fomenta el descubrimiento, la exploración y la construcción activa del conocimiento. Se busca desarrollar habilidades y competencias matemáticas más allá del currículo tradicional, fomentando el interés y la pasión por las matemáticas. Los problemas geométricos de las olimpíadas proporcionan a los estudiantes desafíos estimulantes que les permiten profundizar en su comprensión de la geometría y desarrollar habilidades de resolución de problemas.

Además de estos fundamentos, las Olimpíadas Matemáticas también promueven la colaboración y el intercambio de conocimientos entre estudiantes y docentes. Se organizan actividades de preparación, capacitaciones y talleres que brindan a los docentes herramientas y estrategias para guiar a los estudiantes en la resolución de problemas geométricos y fomentar su participación en las olimpíadas.

En resumen, las bases matemáticas, didácticas y pedagógicas de las Olimpíadas Matemáticas, especialmente en el campo de la geometría, se centran en una comprensión sólida de los conceptos matemáticos, la resolución de problemas desafiantes como medio de aprendizaje, y un enfoque pedagógico centrado en el estudiante. Estas bases buscan promover el pensamiento crítico, la creatividad y la pasión por las matemáticas, así como el desarrollo de habilidades geométricas y competencias más allá del currículo tradicional.

2. Contenidos

El taller se centrará en los siguientes temas:

- Figuras geométricas básicas: Lugares geométricos relacionados con la equidistancia. Puntos, rectas y circunferencias relacionados con triángulos. Construcciones de triángulos a partir de condiciones geométricas.
- Cuadriláteros convexos: Propiedades de los lados, diagonales y ángulos interiores.
- La circunferencia. Cuadriláteros inscritos en una circunferencia
- La semejanza. Criterio de semejanza de triángulos. Aplicaciones: El teorema de Pitágoras y el área de polígonos.
- Razones trigonométricas. Teoremas del seno. Consecuencias interesantes.

3. Requisitos

Para participar en este taller, se requiere tener conocimientos básicos de geometría y familiaridad con el software GeoGebra 5.0. https://www.geogebra.org/

4. Objetivos

Los objetivos principales del taller son:

- Proponer, anticipar y registrar situaciones problemáticas que puedan resolverse utilizando diferentes estrategias, dentro del marco de los conocimientos disponibles.
- Identificar y señalar las diferencias y similitudes entre diversas formas de resolución, fomentando la participación activa de los estudiantes y promoviendo la discusión respetuosa de las intervenciones de todos los estudiantes.
- Identificar los saberes previos y emergentes de los estudiantes en relación con la situación problemática planteada, para adaptar y personalizar la enseñanza de acuerdo a las necesidades individuales.
- Colaborar con los estudiantes para lograr la modelización matemática de las situaciones analizadas, es decir, representarlas y expresarlas en términos de conceptos y relaciones matemáticas adecuadas.
- Estimular a los estudiantes a construir generalizaciones y fórmulas matemáticas que permitan abordar y resolver problemas de manera más eficiente y efectiva.
- Presentar a los estudiantes tareas que involucren el uso de diferentes software y herramientas tecnológicas, considerando los límites y alcances de cada uno de ellos.

5. Metodología

La metodología utilizada en el taller se basará en el planteo de situaciones problemáticas como enfoque principal para abordar los siguientes temas:

- Figuras geométricas básicas: Se plantearán situaciones problemáticas relacionadas con lugares geométricos que involucran la equidistancia. Los participantes resolverán problemas que requieran la identificación de puntos, rectas y circunferencias relacionados con triángulos. Además, se explorarán construcciones de triángulos a partir de condiciones geométricas específicas. Coxeter et al. [33]
- Cuadriláteros convexos: Se presentarán situaciones problemáticas que permitan investigar y comprender las propiedades de los lados, diagonales y ángulos interiores de cuadriláteros convexos. Los participantes analizarán y resolverán problemas relacionados con estas propiedades. Coxeter et al. [33] y Eves [36]
- La circunferencia: Se abordarán situaciones problemáticas que involucren la circunferencia y su relación con otros elementos geométricos. Se explorarán cuadriláteros inscritos en una circunferencia y se resolverán problemas relacionados con estas configuraciones. Coxeter et al. [33]
- La semejanza: Se plantearán situaciones problemáticas que permitan explorar el concepto de semejanza entre triángulos. Los participantes aplicarán el criterio de semejanza de triángulos para resolver problemas específicos. Además, se investigarán aplicaciones de la semejanza, como la utilización del teorema de Pitágoras y el cálculo del área de polígonos. Fuxman Bass [39]
- Razones trigonométricas: Se presentarán situaciones problemáticas que requieran el uso de las razones trigonométricas, en particular el teorema del seno. Los participantes resolverán problemas que involucren el cálculo de medidas de ángulos y longitudes de segmentos utilizando estas razones trigonométricas. Además, se explorarán las consecuencias interesantes derivadas del teorema del seno. Durell y Robson [34]

En resumen, la metodología del taller se basará en el planteo de situaciones problemáticas para que los participantes puedan investigar, analizar y resolver problemas relacionados con figuras geométricas, cuadriláteros, la circunferencia, la semejanza y las razones trigonométricas. Este enfoque permitirá un aprendizaje activo, promoviendo el razonamiento y la aplicación de los conceptos geométricos en contextos desafiantes y significativos. *Notas de Geometría* [37]

6. Actividades

A continuación se detallan las principales actividades a realizar durante el taller:

6.1 Actividades previas

- Recopilación de material bibliográfico de secundaria en relación al eje Geometría y Medida del Ciclo Básico y Ciclo Orientado: *Núcleos de aprendizajes prioritarios* [38]
- Solicitar a los participantes que recopilen material bibliográfico (libros, manuales, guías) relacionado con el tema de geometría y medida en el nivel de educación secundaria. Los participantes deben revisar los contenidos y enfoques de los materiales seleccionados para tener una visión general de los recursos disponibles. Elaboración de cuadro comparativo de los diferentes conceptos abordados por diferentes editoriales.
- Solicitar a los participantes que elaboren un cuadro comparativo que incluya las diferentes editoriales y los conceptos de geometría y medida abordados en sus materiales. Los participantes deben identificar los conceptos específicos y hacer una comparación de cómo se presentan y desarrollan en cada recurso. Elaboración de cuadro comparativo sobre la dificultad que muestran dichos textos en relación a la presentación de problemas de geometría.
- Solicitar a los participantes que elaboren un cuadro comparativo que evalúe la dificultad de los textos en relación a la presentación de problemas de geometría. Los participantes deben considerar la claridad de las explicaciones, la profundidad de los problemas y la progresión de dificultad en los textos analizados.
- Los participantes deben explorar y familiarizarse con los recursos disponibles, como actividades interactivas, ejercicios y problemas de geometría.

Una guía para la búsqueda y la exploración se dejará en un curso de la plataforma Moodle.

6.2 Primera hora y media presenciales

- Presentación de la Olimpiada Matemática Argentina y el Torneo de Geometría e Imaginación a través de recursos multimediales: Se utilizarán recursos multimediales, como videos, presentaciones o páginas web, para introducir a los participantes en la Olimpiada Matemática Argentina y el Torneo de Geometría e Imaginación. Estos recursos proporcionarán información sobre el propósito, las características y los desafíos de estas competencias matemáticas.
- Reconocimiento de páginas oficiales y el material de sustento proporcionado por cada página: Los participantes explorarán las páginas web oficiales de la Olimpiada Matemática Argentina y el Torneo de Geometría e Imaginación. Se les guiará para que identifiquen y examinen el material de sustento proporcionado en estas páginas, como guías de estudio, problemas anteriores y recursos didácticos. *Notas de Geometría* [37]
- Presentación de material bibliográfico específico de la Olimpiada Matemática: Se compartirá con los participantes material bibliográfico específico relacionado con la Olimpiada Matemática Argentina y el Torneo de Geometría e Imaginación. Esto puede incluir libros, artículos o documentos que contengan ejercicios y problemas de geometría enfocados en las competencias.
- Presentación por parte de los docentes participantes de los cuadros comparativos elaborados: Los docentes participantes compartirán los cuadros comparativos que elaboraron previamente, donde se analizan y comparan diferentes recursos y materiales relacionados con la geometría y las olimpiadas matemáticas. Esto permitirá a los demás docentes conocer diferentes enfoques y contenidos presentes en el material disponible.
- Discusión en grupos pequeños sobre las características principales del material y la elección del material a utilizar durante el taller: Se formarán grupos pequeños de discusión, donde los participantes intercambiarán ideas y opiniones sobre las características principales del material presentado y su pertinencia para el desarrollo del taller. Se buscará consenso y reflexión sobre qué material utilizar durante el taller, teniendo en cuenta las necesidades y objetivos de los participantes.
- Estas actividades proporcionarán a los participantes una visión general de la Olimpiada Matemática Argentina y el Torneo de Geometría e Imaginación, les permitirán familiarizarse con el material de apoyo y promoverán la reflexión y la elección adecuada del material para el desarrollo del taller. Además, se fomentará la colaboración y el intercambio de ideas entre los participantes para enriquecer la experiencia de aprendizaje.

6.3 Primeras dos horas entre clases

Durante el taller, se les pedirá a los cursantes que resuelvan tres problemas de Torneo de Geometría e Imaginación, los cuales estarán adaptados a diferentes ciclos educativos. Estos problemas se resolverán de manera asíncrona, lo que significa que cada participante podrá trabajar en ellos a su propio ritmo y en el momento que le resulte más conveniente.

Se proporcionarán los problemas a los participantes, junto con los recursos y materiales necesarios para abordarlos. Cada problema estará diseñado para desafiar el pensamiento geométrico y la creatividad de los participantes, alentándolos a aplicar los conceptos y estrategias aprendidas durante el taller.

En resumen, los cursantes del taller deberán resolver tres problemas de Torneo de Geometría e Imaginación de forma asíncrona, y prepararse para la segunda sesión presencial para compartir y discutir sus soluciones en un ambiente de aprendizaje colaborativo. *Notas de Geometría* [37]

6.4 Segundas dos horas presenciales

Una vez que los cursantes hayan resuelto los problemas de forma individual, se llevará a cabo una puesta en común. Durante esta sesión, los participantes compartirán sus soluciones y estrategias utilizadas para resolver los problemas. Se fomentará la discusión y el intercambio de ideas entre los participantes, en un entorno de respeto y colaboración.

La puesta en común permitirá que los cursantes aprendan de las diferentes aproximaciones y enfoques utilizados por sus compañeros, y también brindará la oportunidad de recibir retroalimentación por parte de los encargados de taller y del resto del grupo. Esta actividad enriquecerá el aprendizaje colectivo y contribuirá a fortalecer las habilidades y el razonamiento geométrico de los participantes.

6.5 Segundas dos horas entre clases

Durante las siguientes horas asincrónicas del taller, se seguirá utilizando la misma metodología de trabajo que se ha empleado anteriormente, pero con un enfoque ligeramente diferente. En lugar de resolver problemas de geometría de las olimpiadas seleccionados previamente, en estas horas se les pedirá a los cursantes del taller que intenten generar problemas de aplicación relacionados con los conceptos geométricos estudiados.

La tarea principal de los participantes será utilizar los conocimientos adquiridos hasta el momento y su creatividad para diseñar situaciones problemáticas que requieran la aplicación de los conceptos y habilidades geométricas abordadas en el taller. Estos problemas de aplicación deben ser desafiantes y significativos, presentando un contexto real o imaginario donde los conceptos geométricos sean relevantes.

Los participantes tendrán la libertad de elegir diferentes temas o áreas de aplicación, como la arquitectura, la ingeniería, el diseño, la navegación, entre otros. Se les animará a considerar situaciones problemáticas que les resulten interesantes y relevantes para su contexto educativo o profesional.

Durante estas horas asincrónicas, los cursantes del taller trabajarán de manera individual o en grupos pequeños para generar los problemas de aplicación. Se les proporcionará una guía o plantilla que les ayude a estructurar los problemas de manera clara, incluyendo la descripción del contexto, los datos relevantes, las preguntas a responder y las indicaciones para la resolución.

Esta actividad de generación de problemas de aplicación fomentará el pensamiento crítico, la creatividad y la capacidad de transferir los conocimientos geométricos a situaciones reales. Además, permitirá a los participantes desarrollar habilidades de diseño de problemas y enriquecerá el banco de recursos didácticos del taller con nuevas situaciones problemáticas para futuras actividades.

6.6 Terceras dos horas presenciales

Una vez generados los problemas de aplicación, los participantes tendrán la oportunidad de compartir y discutir sus creaciones en esta sesión presencial del taller. Durante esta sesión, se promoverá el intercambio de problemas entre los participantes, brindando retroalimentación constructiva y sugiriendo posibles mejoras o modificaciones.

6.7 Evaluación final

La evaluación final de este taller se llevará a cabo mediante la presentación de posibles soluciones a un problema de Geometría propuesto a nivel nacional de la Olimpiada Matemática Argentina y la resolución de un problema de Torneo de Geometría y Medida utilizando modalidades diferentes.

Para la evaluación del problema de Geometría propuesto de nivel nacional, los participantes deberán analizar en detalle el enunciado del problema, identificar los conceptos y técnicas geométricas relevantes y proponer una solución rigurosa y fundamentada. Se espera que demuestren un sólido dominio de los conceptos geométricos abordados en el taller, así como habilidades para plantear estrategias de resolución y justificar sus razonamientos.

Por otro lado, la resolución del problema de Torneo de Geometría y Medida se llevará a cabo utilizando modalidades diferentes. Esto implica que los participantes deberán abordar el problema desde diferentes perspectivas o enfoques, empleando diversas estrategias de resolución. Se espera que muestren flexibilidad y creatividad en la búsqueda de soluciones, demostrando un pensamiento geométrico sólido y habilidades para argumentar y justificar sus procesos de resolución.

En ambos temas, se valorará tanto la precisión y corrección de las soluciones propuestas como la claridad y coherencia en la presentación de los razonamientos. Se espera que los participantes apliquen los conocimientos adquiridos durante el taller de manera efectiva, demostrando un buen nivel de comprensión de los conceptos y habilidades geométricas abordadas. También se evaluará su capacidad para comunicar de manera clara y concisa sus ideas y resultados.

La evaluación final a través de la presentación de soluciones a un problema de Geometría de nivel nacional y la resolución de un problema de Torneo de Geometría y Medida con modalidades diferentes permitirá evaluar de manera integral el desempeño y los logros de los participantes en el taller, proporcionando una retroalimentación valiosa sobre su dominio de los contenidos y habilidades geométricas, así como su capacidad para aplicarlos en diferentes contextos y modalidades de resolución.

7. Bibliografía

[32] Birkhoff, G. D., & Beatley, J. H. (1999). *Basic Geometry* (Vol. 39). American Mathematical Society.
[33] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L., & Pedoe, D. (1997). *Geometry Revisited*. Mathematical Association of America.
[34] Durell, C. V., & Robson, A. (2003). *Advanced Trigonometry*. Dover Publications.
[35] Moise, E. E., & Downs, F. L. (1990). *Geometry*. Addison-Wesley.
[36] Eves, H. (1963). *Estudio de las Geometrías, Tomos I y II*. Editorial Uteha.
[37] *Notas de Geometría*. (2023). Olimpíada Matemática Argentina. https://www.oma.org.ar/notasdegeo/index.htm
[38] *Núcleos de aprendizajes prioritarios*. (2011). Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de Salta. http://www.edusalta.gov.ar/index.php/docentes/normativa-educativa/disenos-curriculares/diseno-curricular-para-educacion-secundaria/1277-diseno-curricular-para-educacion-secundaria-1/file
[39] Fuxman Bass, J. I. (2019). *Resolviendo Problemas de Matemáticas*. Red Olímpica.

II
Comunicaciones breves

Ecuaciones diferenciales y GeoGebra: un viaje visual por la carga y descarga de un capacitor en un circuito RC

Ezequiel Francisco Chocobar
Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de Salta
ezequiel.chocobar@exa.unsa.edu.ar

Resumen. Esta comunicación se basará en una aplicación de Ecuaciones Diferenciales aplicado a Circuitos Eléctricos. Para este caso será con el circuito R-C (Resistor - Capacitor) cuyo modelo es $R \cdot q' + (1/C) \cdot q = E(t)$ (la entrada simbolizada como $E(t)$ que representará como varía la diferencia de potencial en función del tiempo). Si $E(t)$ distinto de 0 representa la carga de un capacitor C, si $E(t)$ es igual a 0 representará la descarga del capacitor. La solución de la EDO (Ecuación Diferencial Ordinaria) con condición inicial será $q(t)$ (será la carga en función del tiempo t) expresada en Coulombs. Se mostrará la resolución de la ecuación mediante el uso de GeoGebra con valores particulares $R = 200\Omega$, 100μF, $E(t) = 20$V, y luego con la herramienta deslizador en GeoGebra se hará variar los parámetros R y C para visualizar cómo va cambiando la función de salida, y hacer algunas interpretaciones físicas de lo que sucederá, con respecto a la cantidad de carga, constante de tiempo, curvas y asíntotas, etc. También se aplicará la función derivada a la misma función $q(t)$ para obtener la intensidad de corriente eléctrica i(t) expresada en Ampere. Es una buena aplicación del software para utilizar en contexto de aprendizaje de Física General.

1. Introducción

La propuesta tendrá una impronta tecnológica-didáctica. Debería estar incluida esta comunicación ya que el GeoGebra es uno de los software más utilizados en los cursos de Análisis Matemático, Física General, etc. Al trabajar ecuaciones diferenciales, es muy importante entender el método de resolución para poder utilizarlo pero también sería interesante que los alumnos puedan aprender en algún curso de ecuaciones diferenciales o de circuitos eléctricos, estas herramientas para poder modelizar de acuerdo a sus intereses y a sus conveniencias en el contacto con las funciones exponenciales que serán la salida de la ecuación diferencial. El circuito R-C (Resistor - Capacitor) cuyo modelo es $R \cdot q' + 1/C \cdot q = E(t)$ será tratada mediante ese software.

2. Requisitos previos

Está destinado a docentes y estudiantes del nivel superior que trabajan en cursos de Análisis Matemático y Física General.

3. Desarrollo

Los temas que se tratarán en la comunicación serán la presentación de la modelización del circuito R-C mediante el uso de ecuaciones diferenciales de primer orden. Luego se ejemplificará con valores particulares $R = 200\Omega, C = 100\mu\text{F}, E(t) = 20\text{V}$ para simular la carga de un capacitor $200 \cdot q' + 1/10^{-4} \cdot q = 20$ con condición inicial $q(0) = 0$ y luego $E(t) = 0\text{V}$ para la descarga del capacitor, $200 \cdot q' + 1/10^{-4} \cdot q = 0$ con condición inicial $q(0) = 0{,}002$. Eso se colocará en el software GeoGebra en la Vista Cálculo Simbólico (CAS): ResuelveEDO$[200y' + 10000y = 20, (0, 0)]$. Cuya solución será: $y(t) = 1/500 \cdot e^{-50t}$. Luego se colocará ResuelveEDO$[R * y' + \frac{1}{C} * y = 20, (0, 0)]$, se aplicará con la herramienta "deslizador" para R y C, por ende se colocará un incremento de 100Ω, con lo cual se aumentará o disminuirá la resistencia y también la del capacitor, y por último se hablará de la constante de tiempo $\tau = RC$. Se hará la interpretación física, de que si la constante de tiempo es relativamente grande es porque la resistencia es muy grande. El circuito cargará con más rapidez si se utiliza una resistencia más pequeña. Y también si a mayor capacitancia mayor carga tendrá el capacitor. Y si hay mayor resistencia habrá un retardo en la carga.

4. Bibliografía

[40] Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics*. Editorial Wiley.

[41] Young, H., & R, F. (2009). *Física universitaria* (Vol. 1). Pearson.

[42] Zill, D., & Cullen, M. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería: ecuaciones diferenciales* (Vol. 1). McGraw-Hill Interamericana.

[43] Giancoli, D. (2009). *Física para ciencias e ingeniería con física moderna* (4.ª ed.). Pearson Educación.

[44] Luna, M., Barrantes, E., & Villogas, E. (2018). Resolución de problemas de ecuaciones diferenciales utilizando geometría dinámica [Grupo de Investigación TecVEM-IREM PUCP]. *IX Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas*.

Investigación sobre las estrategias de enseñanza implementadas en un profesorado de matemática durante la pandemia por COVID-19

Fabiana Montenegro
Escuela Normal Superior N° 32 "General José de San Martín"
montenegrofg@gmail.com

Mariela Cravero
Escuela Normal Superior N° 32 "General José de San Martín"

Carlos Fernández
Escuela Normal Superior N° 32 "General José de San Martín"

María Gracia Raquel Salazar
Escuela Normal Superior N° 32 "General José de San Martín"

Resumen. Con el objeto de promover la función de investigación y suscitar la producción de conocimiento educativo y pedagógico en el nivel Superior y en los Institutos Superiores de Formación Docente (ISFD) el Instituto Nacional de Formación Docente (INFoD) en el año 2021 convocó a las y los docentes y estudiantes de carreras de Formación Docente de Institutos Superiores de gestión estatal a presentar proyectos de investigación. El eje priorizado, en dicha convocatoria, fue la educación en Argentina en el contexto de la emergencia sanitaria generada por el Coronavirus SARS-CoV-2. En el marco de dicha convocatoria los autores de esta ponencia presentamos un proyecto cuyo objetivo fue indagar y analizar, desde lo didáctico y lo curricular, las estrategias de enseñanza implementadas por las y los docentes de los espacios curriculares de la formación específica y de la formación en la práctica profesional del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática del ISFD N°32 de Santa Fe, durante la pandemia por COVID-19. En este trabajo presentamos los resultados de una encuesta que formó parte de la investigación desarrollada en el 2022.

1. Introducción

Esta ponencia describe algunos resultados derivados de una investigación referida a las estrategias de enseñanza llevadas a cabo en un profesorado de matemática para la educación secundaria durante los años de la pandemia. Consideramos que esta comunicación en las JEM favorece el intercambio de análisis de experiencias de un hecho reciente que obligó a todos los niveles del sistema educativo de 190 países del mundo a desarrollar tareas educativas en entornos virtuales.

2. Requisitos previos

Profesores y profesoras de Matemática y estudiantes de Profesorado de Matemática.

3. Desarrollo

Como consecuencia del Aislamiento Social Preventivo y Obligatorio (ASPO) el cuerpo docente se vio en la necesidad de adaptarse y brindar respuestas a las necesidades educativas de los y las estudiantes. Tal como otros educadores, llamamos a este escenario Educación Remota de Emergencia (ERE).

En este contexto, para desarrollar las propuestas educativas gran parte del colectivo docente recurrió al uso de TIC. Según Coll [47], las propuestas educativas que incorporan las TIC con un cierto nivel de elaboración deberían incluir tres tipos de ingredientes: los recursos y software que profesores y alumnos utilizan para enseñar y aprender; un diseño instruccional elaborado y explícito con objetivos, contenidos y actividades de enseñanza, aprendizaje y evaluación y un conjunto de normas y sugerencias sobre cómo utilizar dichas herramientas. En síntesis, las propuestas educativas apoyadas en las TIC incluyen dos aspectos interdependientes: tecnológicos como pedagógicos, que se integran en lo que Coll [47] denominó un diseño tecnopedagógico.

Cabe aclarar que al hablar de TIC haremos referencia tanto a los dispositivos, aplicaciones, software informáticos como a las acciones que éstos habilitan para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En cuanto a los usos que pueden darse a dichos recursos adoptamos la clasificación que se presenta en Bravo [46] diferenciando 2 dimensiones: los vinculados a la matemática (para producir matemática, para recibir información matemática, para comunicar información matemática) y los vinculados con la comunicación.

En relación al concepto de estrategias de enseñanza (EE), recuperamos la conceptualización de Anijovich y Mora [45] que define las EE como el conjunto de decisiones que asume el docente para orientar la enseñanza de un contenido disciplinar teniendo en cuenta qué quiere que los estudiantes comprendan, por qué y para qué.

Bajo este marco de referencia, consideramos indagar y analizar las EE implementadas por los y las docentes para desarrollar su propuesta educativa.

Considerando que la complejidad del objeto de estudio de esta investigación requería la utilización e integración de diferentes abordajes metodológicos, planteamos una investigación exploratoria y descriptiva y optamos por el enfoque metodológico conocido como método mixto, que complementa los métodos cualitativos y cuantitativos.

Para dar respuesta a nuestro problema de investigación, en primer lugar, se profundizó el marco teórico. En segundo lugar, se llevó a cabo una encuesta online a través de formulario de Google a las y los profesores de manera voluntaria y anónima. Seguidamente, se realizaron entrevistas en profundidad a algunos de las y los docentes encuestados. Culminamos analizando materiales didácticos que nos compartieron algunos docentes de manera voluntaria y que se desarrollaron durante el ASPO.

Por cuestiones de espacio a continuación presentaremos el análisis de una pregunta que formó parte de la encuesta. Decidimos presentar, en este trabajo, los resultados parciales de la encuesta puesto que constituyó nuestro primer instrumento de recolección de datos, porque nos permitió aprovechar conceptos y gráficos variados de la estadística descriptiva y porque de ella surgieron hipótesis que buscamos ratificar o rectificar en las entrevistas.

En una de las preguntas se pedía vincular diferentes recursos tecnológicos con los usos que se les dieron para la enseñanza de la matemática. Las y los docentes encuestados debieron elegir entre los siguientes recursos: aula virtual del INFoD, videoconferencias, mensajería interna, aplicativos, presentación, buscadores y redes sociales. Y los posibles usos dados: para debatir, compartir información, buscar información, emplear en la ejercitación, producir materiales, aprender definiciones, propiedades, procedimientos, comunicarse con las/os estudiantes.

Luego de analizar los resultados de las encuestas y empleando gráficos estadísticos para su interpretación puede concluirse que, el debate se desarrolló durante la ERE en mayor medida a través del Aula virtual del INFoD (60 %) y de videoconferencias (70 %). Todos los recursos tecnológicos considerados fueron empleados en el debate con y entre los estudiantes. Los recursos mayormente empleados para compartir resolución de ejercicios fueron el Aula Virtual del INFoD (60 %), videoconferencias (55 %) y presentaciones (50 %). También fueron importantes los aplicativos (GeoGebra, Excel, etc.) (35 %). Para la búsqueda de información no se emplearon las redes sociales como se esperaba; sino que, fue mayormente a través de buscadores de la web (Google, Bing, etc.) (55 %) y del Aula Virtual del INFoD (50 %).

Los aplicativos fueron el recurso más utilizado en el empleo de ejercitación (60 %). Las presentaciones (30 %) y el Aula Virtual del INFoD (35 %), suman aproximadamente el mismo porcentaje que las aplicaciones. Se puede asumir que la producción de materiales se canalizó por el Aula Virtual del INFoD (50 %) y por presentaciones (50 %).

El aprendizaje de definiciones, propiedades y procedimientos se desarrolló a través de tareas empleando mayoritariamente el Aula Virtual del INFoD como recurso (85 %). Además, se estimó que también se desarrolló a través de las videoconferencias (60 %). Resulta llamativo que aplicaciones –como GeoGebra– no presenten mayor porcentaje debido a la posibilidad que ofrecen para visualizar, explorar y conjeturar. Las posibles comunicaciones docente-estudiante se establecieron principalmente a través del Aula Virtual del INFoD (65 %), en menor medida por videoconferencias (50 %) y en tercer lugar por el uso de mensajes a través del teléfono celular (30 %). Podemos distinguir que el primer y tercer grupo se refieren a comunicaciones asincrónicas mientras que las del segundo grupo son sincrónicas. De acuerdo a los resultados obtenidos, se puede aseverar que el uso de las comunicaciones asincrónicas es aproximadamente el doble que las sincrónicas, coincidiendo con las directrices establecidas por el INFoD.

Es posible, entonces, concluir que en los espacios curriculares de las y los profesores que respondieron a la encuesta aparecen las cuatro dimensiones en cuanto a los uso de los recursos informáticos que se consideran en Bravo [46]. El hecho de que los recursos más empleados fueron el Aula Virtual del INFoD y las videoconferencias puede explicarse por diversos motivos. En cuanto a la primera muchos de las y los docentes ya tenían parte de sus cátedras virtualizadas ya que nuestro IFD tiene acceso al uso de la misma desde el año 2014 y por disposición institucional fue el único medio por el que las y los profesores debíamos comunicarnos con las y los estudiantes durante el 2020. Y en relación a las videoconferencias suponemos que fue el recurso que permitió mediar en el vínculo pedagógico y contener, no sólo académicamente, a las y los estudiantes.

4. Bibliografía

[45] Anijovich, R., & Mora, S. (2010). *Estrategias de enseñanza: otra mirada al quehacer del aula*. Aique Grupo Editor.

[46] Bravo, D. O. (2016). *Nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el Colegio del Castillo: descripción del uso actual y propuesta de proyecto de actualización tecnológica* [Tesina]. Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Buenos Aires.

[47] Coll, C. (2011). El diseño tecnopedagógico. En F. Díaz Barriga, G. Hernández & M. A. Rigo (Eds.), *Experiencias educativas con recursos digitales: Prácticas de uso y diseño tecnopedagógico*. Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Psicología.

Epistemología e historia de la Matemática: evaluación con monografía y ejemplo

María Martha Ferrero
Universidad Nacional del Comahue
marthaferrero@gmail.com

Abraham Vargas Nuñez
Universidad Nacional del Comahue

Resumen. Numerosos planes de estudio de la carrera Profesorado en Matemática incluyen una materia de "Epistemología e Historia de la Matemática" con la finalidad de animar a que los futuros profesores reflexionen, analicen y conozcan el proceso de construcción del conocimiento matemático, así como también profundicen en los aspectos culturales y epistemológicos de la disciplina. En la sede Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue intentamos lograr en los-las estudiantes una visión integradora de los temas de Matemática que a lo largo de la carrera han visto en distintas materias y desde distintos abordajes. La evaluación monográfica como cierre de la materia, ha resultado una herramienta valiosa como oportunidad para que los alumnos profundicen un tema de Matemática o de la historia de la Matemática que les interese especialmente, claramente delimitado y desarrollado de forma lógica, recurriendo a la investigación bibliográfica. En esta comunicación, presentamos un resumen de la monografía "*El problema isoperimétrico*", añadiendo comentarios referidos a los contenidos trabajados en la cursada. En la elaboración del trabajo monográfico se presentan numerosas oportunidades de discutir entre pares y con la docente acerca de las temáticas generales de la Matemática y particulares de cada uno de los temas elegidos. Se trata de una producción andamiada y colaborativa, con perspectiva al futuro desempeño de los-las estudiantes como docentes.

1. Introducción

En la actualidad, encontramos que los planes de estudio de la carrera Profesorado en Matemática incluyen una materia de "Epistemología e Historia de la Matemática" con la finalidad de animar a que los futuros profesores reflexionen, analicen y conozcan el proceso de construcción del conocimiento matemático, así como también profundicen en los aspectos culturales y epistemológicos de la disciplina.

En la sede B. de la U. N. intentamos lograr en los/las estudiantes una visión integradora de los temas de Matemática que a lo largo de la carrera han visto en distintas materias y desde distintos abordajes, teniendo en cuenta que después de 4 años de formación tienen una mirada m´as cercana a la mirada experta por lo cual pueden resignificar sus aprendizajes y proyectarse en su futuro desempeño como profesores. Los/las estudiantes revisan entonces su propia experiencia y algunos conceptos e ideas matemáticas son contextualizadas desde un punto de vista histórico y cultural.

La evaluación monográfica como cierre de la materia, ha resultado una herramienta valiosa como oportunidad para que los alumnos profundicen un tema de Matemática o de la historia de la Matemática que les interese especialmente, claramente delimitado y desarrollado de forma lógica, recurriendo a la investigación bibliográfica.

En esta comunicación, presentamos un resumen de la monografía (producto final) "*El problema isoperimétrico*" del estudiante A. V. N., añadiendo comentarios referidos a los contenidos trabajados en la cursada y a modo de cierre evaluamos la dinámica del proceso de su elaboración, mostrando el diálogo docente-alumno en cuanto a sugerencias bibliográficas, adecuación y retroalimentación, así como también algunas valoraciones sobre el aprendizaje que representa este modo de trabajo.

2. Desarrollo

En primer lugar, cabe mencionar que etimológicamente «isoperimetría» significa literalmente "con igual perímetro". En Matemática, la isoperimetría es el estudio general de las figuras geométricas planas que tienen contornos iguales y su relación con el área que encierran

De manera explícita se prioriza desde la cátedra un acercamiento histórico y epistemológico a los temas, siendo que los problemas didácticos y cognitivos que la relación entre perímetro y área de figuras puede suscitar escapan al alcance de la materia (si bien forman parte de los procesos de discusión). Es así que, a quienes quieran profundizar en estos aspectos recomendamos el artículo de D'Amore y Fandiño Pinilla [57], "*Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes*".

A continuación se hace un relato "a dos voces" en que la primera corresponde a extractos de la monografía del estudiante y la segunda contiene comentarios relacionados con los contenidos históricos y epistemológicos trabajados durante la cursada.

2.1 Introducción a la monografía

> Todas las personas en la toma de decisiones, con las cuales pretenden obtener alguna ganancia, involucran procesos de optimización. Cuando se trata de situaciones sencillas, los procesos también lo son; y la puesta en juego de la intuición y experiencia personal, tal vez, juegan un rol importante. Sin embargo, a medida que se abandonan las situaciones más triviales y la mirada se centra en aquellas donde la solución óptima es fundamental, por diferentes motivos, resalta la necesidad de comprender e investigar las operaciones óptimas para la toma de decisiones; y por tanto, surge en la sociedad la tendencia a la complejización y sofisticación matemática para poder dar respuestas viables y más favorables a diferentes problemáticas (Hernández [50] y Zavala Díaz y Vakhania [56]).

Las tendencias recientes en filosofía de las matemáticas reconocen un triple carácter en esta disciplina: las matemáticas como quehacer humano, comprometido con la resolución de cierta clase de situaciones problemáticas; las matemáticas como lenguaje simbólico y como un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido, emergente de la actividad de matematización. (J. Godino et al. [59]).

> Sujeto a estos argumentos es que, cuando estaba cursando el primer año del Profesorado Universitario en Matemáticas y estaba preparándome para rendir el final de la materia Geometría Euclidiana, surgieron de entre los conceptos que iban y venían, y entre las múltiples hojas que escribía resolviendo diversos ejercicios, la siguiente cadena de interrogantes: ¿cuál es el triángulo que encierra el área máxima entre todos los triángulos de igual perímetro?, más aún, ¿cuál es el polígono de n lados que encierra área máxima entre todos los polígonos de n lados cuyo perímetro es idéntico?; y finalmente, ¿cuál es la curva que encierra máxima área entre todas las curvas de igual longitud? Sin darme cuenta, me había sumergido en una problemática ya existente de un problema que fue discutido durante más de dos mil años para ser resuelto: el problema isoperimétrico.

Recorte acorde a los alcances de la monografía: *Tratamiento en el marco de la Geometría Euclidiana*, materia en que ha surgido la inquietud del estudiante por explorar y profundizar en el tema elegido.

2.2 El problema isoperimétrico

> El problema isoperimétrico es un problema de optimización (llamaremos problema de optimización a todo aquel en el cual el objetivo fundamental es obtener un valor máximo o un valor mínimo de alguna variable). Claro que no fue entendido ni clasificado como tal, sino hasta las proximidades del siglo XIX.

Encuadre del tema en un área específica de la matemática: **optimización**. Dimensión matemática.

2.2.1 El problema isoperimétrico como un hito histórico

> La historia muestra grandes hitos respecto al estudio de los problemas de optimización. Algunos de estos son:
>
> - La obra de Pappus de Alejandría "Colección matemática" (320 a.C.)
> - Los problemas isoperimétricos (Zenodoro, Gergonne, Steiner).
> - El desarrollo del cálculo diferencial en el siglo XVII, reconocida por el uso de derivadas para resolver problemas de máximos y mínimos. Distinguida aún más, por los aportes de Euler, quien propone y crea el cálculo de variaciones, considerando la obtención de funciones que optimizan funciones. Esto proporcionó valiosas herramientas matemáticas para afrontar problemas más avanzados.
> - El desarrollo de la programación lineal en la primera mitad del siglo XX. Kantorovich y Koopmans recibieron el premio Nobel de Economía en 1975 (*teoría de la asignación óptima de recursos*).

Encuadre del tema como hito histórico en optimización junto con otros hitos en el área. Dimensión histórica

2.2.2 Origen del problema isoperimétrico

Existen varias fuentes que narran el surgimiento del problema isoperimétrico, sin duda alguna, todas sostienen que es una leyenda que hunde sus raíces en la mitología. La misma nació a continuación de la migración fenicia, cuando Dido, o Elisa, se estableció en el norte de África (en la región que actualmente se llama Túnez).

Elisa llegó a las costas de África, donde vivían los gétulos, una tribu de libios cuyo rey era Jarbas. Pidió hospitalidad y un trozo de tierra para instalarse en ella con su séquito. Jarbas le expuso que le daría tanta tierra como ella pudiera abarcar con una piel de buey. Elisa, a fin de que la piel abarcara la máxima tierra posible, la hizo cortar en finas tiras y así consiguió circunscribir un extenso perímetro. Tras esto hizo erigir una fortaleza llamada Birsa, que más tarde se convirtió en la ciudad de Carthago o Qart-Hadašh, sobre un promontorio existente entre el lago de Túnez y la laguna Sebkah er-Riana, que desembocaba en mar abierto. Instaurada como soberana de la ciudadela, recibió de los habitantes el nombre de Dido. Dido es sin duda una mujer excepcional. Arguedas [49].

No es fortuito que las historietas y leyendas que ligan área y perímetro sean antiquísimas y se repitan en el tiempo, incluso a distancia de siglos (basta pensar en el mito sobre la fundación de Cartagine por parte de Didone y a la célebre adivinanza de Galileo). Esta es una señal, no más que una señal, por supuesto, de obstáculo epistemológico; por otra parte: cuando una idea matemática no entra inmediatamente a formar parte de esta disciplina y, por el contrario, es causa de discusiones, contestaciones, luchas; generalmente puede considerarse un obstáculo epistemológico en el sentido de Brousseau. D'Amore y Fandiño Pinilla [57].

Dimensión epistemológica.

2.2.3 El problema isoperimétrico "vivo" durante 2000 años

El problema isoperimétrico no quedó resuelto, en la época de Dido, desde un punto de vista matemático. Existieron muchos matemáticos que se esforzaron en resolver este problema. Partiendo desde el griego Zenodoro, quien hizo grandes contribuciones para la resolución de este aporte, y vivió en torno al 200 a.C.; y concluyendo en principios del siglo XIX, cuando el problema fue completamente resuelto por Weierstrass, el cual utilizó el cálculo de variaciones.

Las matemáticas constituyen, por tanto, una realidad cultural constituida por conceptos, proposiciones, teorías, etc. (los objetos matemáticos) y cuya significación personal e institucional está íntimamente ligada a los sistemas de prácticas realizadas para la resolución de las situaciones-problemas. J. Godino et al. [59].

2.3 Zenodoro, el geómetra griego

Zenodoro, al parecer, vivió en Atenas, aproximadamente entre los años 200 y 140 a.C. Su trabajo sobre figuras isoperimétricas se conoce por medio de algunas referencias, como la que realiza Teón de Alejandría (335-405), matemático griego, en sus amplios comentarios al Almagesto de Ptolomeo. Pappus (290-350) también hace uso de las proposiciones de Zenodoro en el libro V de su *Colección Matemática* (Herrero [51]).

Zenodoro, tras abordar el problema isoperimétrico, intenta demostrar que el círculo tiene mayor área que cualquier polígono con el mismo perímetro.

Una de las propiedades que demostró Zenodoro falla. Fue, probablemente Pappus, quien se percató de tal error y hace una nueva demostración tras recoger los escritos de Zenodoro. Años más tarde, Lhulier (1750-1840) y Steiner (1796-1863) resuelven el problema.

En este apartado el estudiante describe los lemas y teoremas enunciados por Zenodoro, muestra varias ilustraciones y realiza un análisis de los mismos. Se detiene en el examen de un argumento de Zenodoro fallido y, si bien no ha quedado registrado en la monografía, se buscaron contraejemplos con el software GeoGebra.

2.4 Una nueva forma de abordar el problema isoperimétrico: Gergonne

Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), es el primer autor que se plantea resolver el problema isoperimétrico sin recurrir a los polígonos, lo que viene a ser un aporte diferente a los que se venían registrando.

Una figura que tenga perímetro fijo y área máxima, ha de ser convexa ya que, si no lo fuera bastará tomar su envoltura convexa (menor conjunto convexo que lo contiene), que tendrá perímetro menor y área mayor. Sólo habrá coincidencia en caso de que la figura de partida fuera convexa. Herrero [51, p. 6].

El estudiante resalta el cambio de perspectiva en el abordaje del problema hacia la generalización (de polígonos a figuras). Aparecen nuevos conceptos y procedimientos matemáticos: convexidad, simetrización.

2.5 El matemático cuyo nombre está ligado con más fuerza al problema isoperimétrico: Jakob Steiner (1796-1863)

El matemático Jakob Steiner (1796-1863) realizó varias demostraciones en el contexto de extensos e interesantes trabajos sobre diferentes aspectos de los máximos y mínimos de medidas asociadas a diferentes figuras (Herrero [51]). Las demostraciones de Steiner encierran construcciones y razonamientos puramente geométricos. Sin embargo, a Steiner se le reprocha, que en sus demostraciones da por supuesta la existencia de solución. Lo mismo ocurre con el razonamiento de Gergonne.

En general, las demostraciones de Steiner utilizan el razonamiento por el absurdo, a pesar de que se trate de argumentos y construcciones diferentes. Esto es, suponer que existe una figura no circular con perímetro fijo y área máxima, y luego demostrar que se puede construir otra figura con el mismo perímetro que tiene mayor área. Lo cual es una contradicción con lo supuesto. Y finalmente, se concluye que la figura óptima debe ser un círculo ya que las nuevas figuras presentan propiedades que solo tiene este.

Demostración del Teorema Principal de Steiner.

Acá se aborda otro elemento epistemológico a considerar: la demostración por absurdo y no por construcción, que ha generado numerosos debates al interior de la comunidad matemática.

2.6 El problema isoperimétrico resuelto después de 2000 años

Fue el ilustre matemático K. Weierstrass (1815-1897) quien dio solución al problema isoperimétrico, y su resolución no vino de la mano de la geometría euclidiana. Posteriormente otros matemáticos como Hurwitz (1859-1919), Blaschke (1855-1962), Schmidt (1876-1959) y Santaló (1911-2001) ofrecieron otras soluciones al problema isoperimétrico abordado desde diferentes caminos. Los "famosos" problemas de optimización o de extremos ligados que se trabajan en carreras universitarias son generalmente abordados utilizando el Teorema de los Multiplicadores de Lagrange, propuesto por el matemático, físico y astrónomo Joseph-Louis Lagrange (1736- 1813). No obstante, Bonnesen ofrece una prueba que mejora la desigualdad isoperimétrica.

... disponemos de todo un sistema conceptual previo, herencia del trabajo anterior de las mentes matemáticas más capaces, que nos proporcionan la solución de un sinnúmero de problemas. Esta herencia quedaría desaprovechada si cada estudiante tuviese que redescubrir por sí mismo todos los conceptos que se le tratan de enseñar. La ciencia, y en particular las matemáticas, no se construye en el vacío, sino sobre los pilares de los conocimientos construidos por nuestros predecesores. (J. Godino et al. [59]).

3. Reflexiones finales

1. En la evolución del problema isoperimétrico hubo diferentes aportes de diversos matemáticos en diferentes tiempos y partes del mundo. Existieron también, errores sustanciales en algunas de las demostraciones propuestas como solución al problema isoperimétrico, dicho desde un punto de vista matemático; sin embargo, se observó una actitud constructiva por parte de los que retomaron la problemática. Pues, si bien, los que retomaban el problema señalaban el error en algunas de las demostraciones que fueron presentadas por otros matemáticos en el pasado (por ejemplo en las demostraciones Zenodoro, Gergonne, Steiner, etc), continuaban trabajando en búsqueda de una solución y retomando las buenas conclusiones de los matemáticos que les precedieron.

Por otro lado, ha contribuido a la resolución del problema isoperimétrico un cambio de perspectiva. Esto resulta importante, pues una mirada reflexiva sobre la evolución histórica del problema isoperimétrico, nos invitaría a plantearnos que, si ya se ha probado por tanto tiempo resolver un problema por un determinado camino, ¿por qué no abordarlo desde otro lugar?

...si se considera que las matemáticas son una construcción humana que surge como consecuencia de la necesidad y curiosidad del hombre por resolver cierta clase de problemas o disposiciones del entorno; que, asimismo, en la invención de los objetos matemáticos tiene lugar un proceso de negociación social y que estos objetos son falibles y sujetos a evolución, entonces el aprendizaje y la enseñanza debe tener en cuenta estos procesos. (J. Godino et al. [59]).

2. El avance en los distintos campos de la matemática ha contribuido en la resolución de múltiples problemas, en particular, el problema isoperimétrico. Como se observó, con las herramientas del cálculo de variables, del cual no disponía Zenodoro, se resolvió el problema de una forma muy sencilla. Entonces, este es un punto de reflexión y, en alguna medida, de confianza para el futuro. Pues, muchos de los problemas matemáticos que actualmente no pueden ser resueltos es probable que más adelante se logren resolver.

Las herramientas materiales, conceptuales y tecnológicas influyen y condicionan la actividad matemática y por tanto a la Matemática misma.

3. En mi propia experiencia, durante la lectura y comprensión de los teoremas explorados de los diferentes autores, noté que el lenguaje matemático ha ido evolucionando a nuestro favor en cuanto a la facilitación de la comunicación de ideas entre matemáticos. La universalización del lenguaje matemático, ayuda a agilizar la comprensión y el crecimiento de la ciencia matemática.

Las matemáticas son un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones-problemas y las soluciones encontradas; ..., como todo lenguaje implica unas reglas de uso que hay que conocer y su aprendizaje ocasiona dificultades similares al aprendizaje de otro lenguaje no materno. (J. Godino et al. [59])

4. Otro aspecto a reflexionar sobre la actividad que manifiestan, en líneas generales, los que trabajan (o trabajaron) con matemática es el hecho de que a pesar de que un problema haya sido resuelto, si no se logró resolver por un determinado camino por el cual se había intentado, parece ser una invitación para muchos a querer hallar la solución por tal recorrido, o al menos querer entender por qué no se pudo ir por ese lado. ¿Cuáles serán los fundamentos de esta actitud, tantas veces vista a lo largo de la humanidad?

Para llevar a cabo este análisis se deben operar transformaciones geométricas sobre las figuras, pero sólo a finales del siglo XIX estas transformaciones, su potencia, su necesidad, se revelaron completamente a los ojos de los matemáticos; por milenios dominó la rigidez de los Elementos de Euclides; incluso este retardo en la introducción-aceptación es una obvia señal de obstáculo epistemológico. (D'Amore y Fandiño Pinilla [57]).

Dimensión epistemológica

5. Por último, las TIC son herramientas con alto potencial matemático que pueden ser usadas a nuestro favor. Estoy seguro de que lo que para Zenodoro representó una gran dificultad, y lo llevó a conclusiones equivocadas, no le hubiera pasado si hubiese sabido utilizar GeoGebra, por ejemplo. Y como se mencionó anteriormente, las intuiciones que se ponen en juego a la hora del trabajo con la geometría euclidiana son muy fuertes, pero a veces equivocadas. Es por eso que el buen uso de las TIC puede representar en nuestro trabajo exploratorio matemático una potente herramienta que complementa otros métodos de la matemática.

Lo que queremos resaltar es que las TIC no solo podrían ser usadas para ahorrar tiempo. ¡Hay mucha matemática valiosa que podría abordarse solo si contamos con tecnología! Sí, sólo si contamos con tecnología. (Rodríguez [55]).

A modo de cierre, siendo el objetivo general de la asignatura "Epistemología e Historia de la Matemática" realizar un análisis sobre aspectos relevantes de la epistemología de la matemática que se proyectan en la problemática didáctica con el fin de proporcionar a los-las estudiantes, futuros profesores de matemática, herramientas para la comprensión de los condicionamientos histórico-sociales del conocimiento científico y sus consecuencias en lo educativo, la elección de la modalidad "Monografía" no es caprichosa.

En la elaboración del trabajo monográfico se consulta bibliografía que debe justificarse pertinente, aparecen conceptos, demostraciones y procedimientos matemáticos que requieren fundamentación y se presentan numerosas oportunidades de discutir entre pares y con la docente acerca de las temáticas generales de la Matemática y particulares de cada uno de los temas elegidos. Se trata de una producción individual, aunque andamiada y colaborativa, con perspectiva al futuro desempeño como docentes.

Pero, así como en las materias de didáctica de la matemática el foco está puesto en la enseñanza, en esta materia el foco está puesto en la matemática pero desde una mirada humanizada y humanizante, que deje lugar a la actividad y a la creatividad. Como señalamos al principio, es fundamental que los estudiantes cuenten con la madurez necesaria para abordar cuestiones epistemológicas en que reflexionen, cuestionen y comprendan los temas que se abordan y entiendan la matemática como una ciencia activa en desarrollo que no está libre de polémicas al interior de la comunidad de matemáticos ya sean más históricas como las controversias entre las escuelas logicista, formalista y constructivista o las actuales como matemática pura o aplicada, el uso de tecnologías para la demostración, etc.

4. Bibliografía de la monografía

[48] Abrate, R. S., Pochulu, M. D., & Vargas, J. M. (2006). *Errores y dificultades en Matemática: Análisis de causas y sugerencias de trabajo* (1.ª ed.). Universidad Nacional de Villa María, Buenos Aires.

[49] Arguedas, V. (2013). La reina Dido de Cartago y el primer problema isoperimétrico conocido. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *13*(2). https://doi.org/10.18845/rdmei.v13i2.1064

[50] Hernández, E. (2011). *Complementos para la formación disciplinar en matemáticas. Presentación de una clase*. http://verso.mat.uam.es/~eugenio.hernandez/11-12MasterFPS/Optimizacion.pdf

[51] Herrero, P. P. J. (2011). Una historia del problema isoperimétrico clásico, con geometría elemental. *La Gaceta de la RSME*, *15*(2), 335-354. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1083

[52] *Isoperimetría* [Wikipedia, Fecha de consulta: diciembre 8, 2021]. (2021). https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Isoperimetr%C3%ADa&oldid=134348272

[53] *Joseph-Louis Lagrange* [Wikipedia, Fecha de consulta: 23:34, diciembre 9, 2021]. (2021). https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Joseph-Louis_Lagrange&oldid=139595584

[54] Prieto de Carlos, C. (2013). *Conquistando terrenos y haciendo pompas de jabón* [2º Encuentro con los números, Universidad Nacional Autónoma de México]. https://vdocumento.com/conquistando-terrenos-y-haciendo-pompas-de-jabn-la-fundacin-de-cartago-en.html

[55] Rodríguez, M. A. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática* (2da edición, revisada y ampliada). Ediciones UNGS.

[56] Zavala Díaz, C., & Vakhania, N. (2014). *Aplicaciones modernas de optimización: La experiencia entre cuerpos académicos*. Artificio Editores SA de CV.

5. Bibliografía

[57] D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes 1. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(1), 39-68.

[58] XXX, M. (2019). Programa de Cátedra: Epistemología e Historia de la Matemática [Link a proveer].

[59] Godino, J., Batanero, C., & Navarro, V. (2003). Epistemología e instrucción matemática: implicaciones para el desarrollo curricular. En *Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática*. http://www.ugr.es/batanero/publicaciones.html

LA TEORÍA DE CONJUNTOS Y SU ENSEÑANZA

ANTONIO NOÉ SÁNGARI
Universidad Nacional de Salta
jem@exa.unsa.edu.ar

SILVIA ISABEL CORIA SARAVIA
Universidad Nacional del Comahue

RESUMEN. La teoría de conjuntos es un pilar fundamental de las matemáticas y su enseñanza requiere una comprensión de las bases matemáticas y estrategias didácticas adecuadas. Los primeros axiomas, como el de extensionalidad, el del conjunto vacío, el de especificación, el de par, el de unión y el del conjunto potencia, establecen las reglas fundamentales para la construcción y manipulación de conjuntos. Expresar estos axiomas en lenguaje simbólico proporciona claridad y precisión, y su traducción al lenguaje coloquial facilita la comprensión por parte de los estudiantes. A partir de estos axiomas, se pueden obtener deducciones y resultados importantes, como el concepto de función. La enseñanza de la teoría de conjuntos requiere considerar tanto los aspectos matemáticos como los didácticos, adaptando el contenido a las necesidades de los estudiantes. En el contexto del sistema educativo argentino, la teoría de conjuntos tiene una importancia destacada y se incluye en la formación docente de matemática. El objetivo de este trabajo final es desarrollar herramientas prácticas para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de la teoría de conjuntos, contribuyendo así a mejorar la calidad de la educación matemática en el aula.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Generalidades

a teoría de conjuntos es un pilar fundamental de las matemáticas, que proporciona un marco conceptual sólido para comprender y analizar las relaciones entre los objetos matemáticos. Desde su desarrollo inicial a principios del siglo XX, la teoría de conjuntos ha evolucionado y se ha convertido en una disciplina central en el currículo de matemáticas, tanto a nivel teórico como aplicado.

La enseñanza de la teoría de conjuntos no solo implica transmitir conocimientos sobre sus fundamentos y técnicas, sino también abordar aspectos didácticos que faciliten su comprensión y aplicación por parte de los estudiantes. Es esencial que los educadores comprendan tanto las bases matemáticas como las estrategias pedagógicas para presentar la teoría de conjuntos de manera accesible y significativa.

Desde una perspectiva matemática, la teoría de conjuntos se basa en un conjunto de axiomas que establecen las reglas fundamentales para la construcción y manipulación de conjuntos. Estos axiomas, como los formulados en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC), proporcionan una base coherente y consistente para desarrollar argumentos lógicos y razonamientos rigurosos en el contexto de conjuntos. Comprender estas bases matemáticas es crucial para los educadores, ya que les permite transmitir los conceptos esenciales de la teoría de conjuntos de manera precisa y clara.

Sin embargo, la enseñanza de la teoría de conjuntos va más allá de la mera exposición de los conceptos matemáticos. Es importante tener en cuenta las consideraciones didácticas para garantizar un aprendizaje efectivo. Esto implica seleccionar estrategias de enseñanza apropiadas, diseñar actividades y ejemplos que fomenten la comprensión activa y reflexiva, y adaptar el contenido a las necesidades y nivel de desarrollo de los estudiantes.

1.2 Importancia en el sistema educativo

En el contexto del sistema educativo argentino, la importancia de la teoría de conjuntos se ve resaltada, sobre todo en la formación docente de matemática. El currículo educativo en Argentina insiste en la inclusión de estos temas, reconociendo su relevancia para el desarrollo del pensamiento lógico y la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales.

1.3 Propósito de este trabajo

Este artículo representa un avance de un traba jo final para completar la carrera de profesorado de matemática, donde se busca abordar el desafío de presentar el material específico de teoría de conjuntos de manera efectiva en el salón de clases. El objetivo principal de este proyecto es desarrollar un texto que faciliten la enseñanza y el aprendizaje de la teoría de conjuntos, adaptándola a las necesidades y nivel de desarrollo de los estudiantes. El objetivo final es contribuir al cuerpo de conocimientos y ofrecer herramientas prácticas a los educadores para abordar la enseñanza de la teoría de conjuntos de manera más efectiva y significativa.

2. Requisitos previos

Conocimientos básicos de matemáticas, incluyendo operaciones aritméticas,álgebra elemental, manipulación de expresiones simbólicas y resolución de ecuaciones simples. Entendimiento básico de la lógica proposicional y el razonamiento deductivo. Conceptos básicos de conjuntos, como pertenencia, inclusión, intersección, unión y diferencia. Conceptos de demostración matemática: la comprensión de conceptos como demostraciones directas, demostraciones por contradicción y demostraciones por casos.

3. Desarrollo

El trabajo final sobre la enseñanza de la teoría de conjuntos consta de tres partes principales que abordan diferentes aspectos de esta disciplina matemática. A continuación, se describen brevemente cada una de estas partes:

Historia de la teoría de conjuntos: En esta parte, se realiza un recorrido histórico de la teoría de conjuntos, destacando los hitos y desarrollos importantes a lo largo del tiempo. Se pueden abordar temas como los primeros conceptos de conjunto, las paradojas que surgieron en el siglo XIX, la formulación de los primeros axiomas por Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel, y los avances posteriores en la teoría de conjuntos en el siglo XX y XXI. Explorar la historia de la teoría de conjuntos proporciona un contexto y una perspectiva más amplia para comprender su evolución y su importancia en las matemáticas.

Primeros axiomas de la teoría de conjuntos: Esta parte se enfoca en los primeros axiomas fundamentales de la teoría de conjuntos, como el axioma del conjunto vacío, el axioma de extensión, el axioma de especificación, el axioma de par y el axioma de unión. Se explican en detalle cada uno de estos axiomas, su significado y sus implicaciones. Además, se puede abordar la importancia de estos axiomas en la construcción y manipulación de conjuntos, así como su papel en la formulación de otros resultados y teoremas en la teoría de conjuntos.

Axiomas del infinito y de sustitución: En esta parte, se exploran los axiomas del infinito y de sustitución, que son dos axiomas adicionales que se añaden a los primeros axiomas básicos. El axioma del infinito establece la existencia de un conjunto infinito, mientras que el axioma de sustitución permite construir conjuntos a través de funciones aplicadas a conjuntos existentes. Estos axiomas amplían la capacidad de la teoría de conjuntos y permiten abordar conceptos y resultados más avanzados, como la construcción de números cardinales y ordinales, entre otros.

Cada una de estas partes del trabajo final aborda aspectos clave de la teoría de conjuntos y su enseñanza, proporcionando una comprensión más completa de los fundamentos teóricos y su aplicación pedagógica. Al explorar la historia, los primeros axiomas y los axiomas adicionales, se logra una visión panorámica de esta disciplina matemática y se sienta una base sólida para la enseñanza efectiva de la teoría de conjuntos en el aula.

A modo de ejemplo comentaremos brevemente dos de esas partes.

3.1 Breve recorrido histórico

Comenzaremos con un breve recorrido histórico de la teoría de conjuntos, destacando los problemas que tuvieron que resolver a lo largo de su desarrollo para concientizar a los lectores sobre la necesidad de la formalización. Ver por ejemplo C. Boyer y Pérez [60].

Siglo XIX: El concepto intuitivo de conjunto ha estado presente en las matemáticas desde tiempos antiguos, pero fue en el siglo XIX cuando la teoría de conjuntos comenzó a tomar forma. Augustin-Louis Cauchy y Georg Cantor, entre otros matemáticos, realizaron contribuciones importantes al estudio de los conjuntos y las colecciones de objetos matemáticos.

Finales del siglo XIX: A medida que la teoría de conjuntos se desarrollaba, surgieron paradojas y contradicciones. El problema más famoso fue la Paradoja de Russell, formulada por Bertrand Russell en 1901. Esta paradoja señaló una aparente contradicción en el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. Estas paradojas plantearon la necesidad de establecer fundamentos lógicos más rigurosos para la teoría de conjuntos.

Primeras décadas del siglo XX: Ernst Zermelo y Abraham Fraenkel fueron dos matemáticos clave en la formulación de un sistema axiomático sólido para la teoría de conjuntos. En 1908, Zermelo propuso los primeros axiomas para establecer una base coherente para los conjuntos. Luego, en la década de 1920, Fraenkel y Zermelo desarrollaron conjuntamente el sistema de axiomas Zermelo-Fraenkel (ZFC), que se convirtió en el marco estándar de la teoría de conjuntos.

Mediados del siglo XX: Durante este período, la teoría de conjuntos se convirtió en una disciplina central en las matemáticas y se utilizaron sus conceptos y técnicas para desarrollar numerosas ramas de la disciplina. Sin embargo, también surgieron problemas adicionales. Uno de los desafíos más importantes fue el llamado "problema de la cardinalidad del continuo" propuesto por Cantor, que trata de determinar si hay algún conjunto que tenga una cardinalidad estrictamente mayor que los números naturales pero menor que los números reales.

Siglo XXI: La teoría de conjuntos sigue siendo un área activa de investigación matemática. Además de los problemas clásicos, han surgido nuevos desafíos, como los estudios sobre conjuntos grandes y estructuras axiomáticas alternativas, como la teoría de conjuntos constructivista y la teoría de conjuntos no estándar.

3.2 Primeros axiomas

En nuestro traba jo suponemos que los lectores están familiarizados con la lógica matemática de primer orden pero si no es el caso tenemos un apéndice basado en el texto de Margaris [61]. El texto base es Cignoli [62]

Expresar los axiomas en lenguaje simbólico tiene varias ventajas y proporciona claridad, precisión y generalidad en el estudio de la teoría de conjuntos. A continuación, se explica la importancia de expresar los axiomas en lenguaje simbólico, su traducción al lenguaje coloquial y la ejemplificación, así como las deducciones que se pueden obtener a partir de estos primeros axiomas:

Claridad y precisión: El lenguaje simbólico utilizado en los axiomas permite una expresión precisa de las ideas matemáticas. Al utilizar símbolos y notaciones formales, se evita la ambigüedad y se logra una mayor claridad en las definiciones y enunciados matemáticos.

Traducción al lenguaje coloquial: Para facilitar la comprensión, los axiomas se pueden traducir al lenguaje coloquial, es decir, al lenguaje cotidiano utilizado en la comunicación. Esto ayuda a relacionar los conceptos matemáticos con situaciones más familiares, lo que puede facilitar su comprensión para aquellos que no están familiarizados con el lenguaje simbólico.

Ejemplificación: Para ilustrar los axiomas, se pueden proporcionar ejemplos concretos que muestren cómo se aplican los conceptos y las reglas establecidas por los axiomas. Estos ejemplos pueden ayudar a los estudiantes a visualizar y comprender mejor los conceptos abstractos presentados en los axiomas.

Generalidad y aplicabilidad: Al expresar los axiomas en lenguaje simbólico, se logra una mayor generalidad y aplicabilidad. Los axiomas no están limitados a situaciones específicas, sino que establecen principios generales que se pueden aplicar en diversos contextos matemáticos. Esto permite una mayor flexibilidad y extensión del conocimiento matemático.

Deducciones: A partir de los primeros axiomas, se pueden realizar deducciones y demostraciones para obtener nuevos resultados matemáticos. Utilizando reglas lógicas y los axiomas como premisas, se pueden construir argumentos que conducen a conclusiones válidas. Estas deducciones permiten desarrollar teoremas y resultados más complejos basados en los axiomas iniciales.

Listaremos los primeros axiomas dando una explicación breve de su sentido.

Axioma de extensionalidad

$$\forall x \forall y (\forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y) \to x = y)$$

Este axioma es fundamental en la teoría de conjuntos, ya que garantiza que las propiedades de igualdad y equivalencia se mantengan en el contexto de conjuntos. Al afirmar que dos conjuntos son iguales si y solo si tienen los mismos elementos, el axioma de extensionalidad establece una noción de igualdad entre conjuntos basada en la identidad de sus elementos.

Axioma del vacío

$$\exists y \forall x \sim (x \in y)$$

El axioma del vacío es uno de los axiomas básicos en la teoría de conjuntos y establece la existencia de un conjunto que no contiene elementos. Este conjunto vacío juega un papel importante en el desarrollo de la teoría de conjuntos, ya que sirve como punto de partida para la construcción de otros conjuntos y operaciones con conjuntos. Además, el axioma del vacío proporciona una base sólida para la formulación de otros axiomas y principios en la teoría de conjuntos.

Con estos dos axiomas obtenemos algunas conclusiones en base a la deducción. En particular mostramos que **el vacío es único**. También agregamos ejemplos explicativos.

Axioma (esquema) de especificacion

Si φ es una fórmula cualquiera de la teoría de conjuntos, con la variable libre t, entonces el siguiente enunciado es un axioma:

$$\forall x \exists y \left(\forall t \left(t \in x \wedge \varphi\left(t\right)\right) \leftrightarrow t \in y\right)$$

El axioma de especificación permite definir subconjuntos basados en una condición o propiedad determinada. Es esencial en la construcción de conjuntos más complejos y en la formulación de teoremas y resultados dentro de la teoría de conjuntos. Proporciona una herramienta poderosa para la construcción de conjuntos más especializados y restringidos a través de la especificación de condiciones específicas.

Axioma de par

$$\forall x \forall y \exists z (\forall t \left(t = x \vee t = y\right) \rightarrow t \in z)$$

En otras palabras, el axioma de par asegura la existencia de un conjunto que contiene los elementos "x" e "y".

Este axioma es fundamental en la teoría de conjuntos, ya que proporciona una base para la construcción de conjuntos más complejos y para el desarrollo de operaciones y estructuras más avanzadas en la teoría de conjuntos.

En este punto, ya nos es relativamente fácil mostrar que **existen** conjuntos con una **cantidad finita cualquiera de elementos.**

Axioma de unión

$$\forall z \exists x \left(\forall t \left(\exists y \left(y \in z \wedge t \in y\right)\right) \rightarrow t \in x\right)$$

El axioma de unión permite construir un conjunto que contiene todos los elementos de los conjuntos que forman parte de otro conjunto. Este axioma es fundamental en la teoría de conjuntos, ya que facilita la formación de conjuntos más grandes y la combinación de elementos de conjuntos más pequeños. Además, el axioma de unión se utiliza en numerosas demostraciones y construcciones en el campo de la teoría de conjuntos.

Axioma del conjunto potencia

$$\forall x \exists y \left(\forall t \left(t \subseteq x \rightarrow t \in y\right)\right)$$

El axioma del conjunto potencia es fundamental en la teoría de conjuntos, ya que proporciona una herramienta poderosa para construir conjuntos más complejos y analizar la estructura de los conjuntos. Además, el conjunto potencia tiene aplicaciones en diversos campos de las matemáticas, como la teoría de conjuntos, la teoría de gráficos, la topología y la teoría de la medida.

A partir del axioma del conjunto potencia, se pueden obtener varias deducciones y resultados. Por ejemplo, se puede demostrar que el conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto dado, y que el conjunto potencia de un conjunto finito con n elementos tiene 2^n elementos. Además, el axioma del conjunto potencia se utiliza en la formulación de otros axiomas y principios en la teoría de conjuntos, permitiendo construir estructuras más complejas y desarrollar resultados más avanzados.

Con los primeros axiomas de la teoría de conjuntos, incluyendo el axioma del conjunto potencia, el axioma de unión, el axioma de par, el axioma de especificación y otros axiomas que se pueden derivar de ellos, es posible llegar a resultados muy importantes, incluyendo el concepto fundamental de función.

La noción de función es esencial en las matemáticas y juega un papel fundamental en diversas ramas de la disciplina. Una función es una relación que asigna a cada elemento de un conjunto, llamado dominio, un único elemento de otro conjunto, llamado codominio. Es una herramienta poderosa para describir y analizar las relaciones entre diferentes conjuntos.

Usando los axiomas mencionados, podemos construir y estudiar funciones de manera rigurosa. Por ejemplo, podemos definir una función f que toma un elemento x del dominio y lo asigna a un único elemento y del codominio. Podemos establecer propiedades como la inyectividad (cada elemento del dominio se asigna a un único elemento del codominio), la sobreyectividad (cada elemento del codominio tiene al menos un elemento del dominio que lo asigna) y la biyectividad (una función que es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva).

Además, los axiomas permiten estudiar las propiedades de las funciones, como la composición de funciones, las funciones inversas y la imagen directa e inversa de conjuntos bajo una función. Estos conceptos son fundamentales en el análisis, el álgebra, la geometría y muchas otras áreas de las matemáticas.

Es importante destacar que los axiomas iniciales proporcionan la base para la construcción de conceptos más avanzados en la teoría de conjuntos y en matemáticas en general. A partir de estos axiomas, se pueden desarrollar teoremas y resultados más sofisticados, que permiten profundizar en el estudio de funciones y su aplicabilidad en diversos contextos matemáticos.

4. Bibliografía

[60] Boyer, C., & Pérez, M. (1999). *Historia de la matemática : Versión de Mariano Martínez Pérez*. Grupo Anaya Comercial. http://books.google.com.ar/books?id=rChoPp0lwr8C

[61] Margaris, A. (1990a). *First Order Mathematical Logic*. Dover Publications. https://books.google.com.ar/books?id=q3mObeaklrIC

[62] Cignoli, R. (2016). *Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción*. Universidad de Buenos Aires. http://books.google.com.ar/books?id=-eD-uAAACAAJ

Trabajo conjunto: primario, secundario, terciario y universitario para una Olimpiada Matemática Argentina en Salta

Verónica Flores Rocha
-
vfloresrocha@gmail.com

Resumen. Luego de recabar datos de varios años, sin incluir el año de pandemia y el pos pandémico, decidimos que necesitamos incorporar nuevas estrategias para optimizar competencias y espacios para resolución de problemas en los diferentes niveles de participantes. Las pensamos, abordamos y se concretaron dos acciones conjuntas: una el convenio con el Instituto Superior del Profesorado de Salta, contando con la participación activa de diez futuros docentes y por otro lado con el dictado de Talleres de Geometría y Combinatoria con la Universidad Nacional de Salta. Contamos con el apoyo del Ministerio de Educación de la Provincia de Salta y en relación a aulas para entrenamiento de escuelas públicas con la EET 3138" Alberto Einstein" . Los diferentes niveles educativos y espacios diversos posibilitaron que en el 2023 se apoye a los estudiantes que sienten el interés y desean aprender aún más sobre Matemática.

1. Desarrollo

La Olimpiada Matemática Argentina presenta, en la actualidad, seis certámenes diferentes: **Olimpiada Internacional Canguro**, **Olimpiada Matemática Ñandú** (orientado a primaria), **Olimpiada Matemática OMA** (orientado a secundaria), **Certamen de Literatura y Matemática** (este certamen está destinado a estudiantes de primaria y secundaria que además disfruten del placer de escribir), **Mateclubes** (primaria y secundaria donde los estudiantes participan en grupos de dos o tres estudiantes del mismo grado o curso y no necesariamente del mismo colegio), y los **Torneos de Geometría** (primaria y secundaria con certámenes independientes). Este último tuvo muy buena acogida por estudiantes de nivel secundario en Salta y nos permitió trabajar con contenidos que se encuentran en los NAPs de la provincia de una manera integrada.

A través del convenio con el Instituto Superior del Profesorado logramos ampliar la posibilidad de brindar problemas para resolución con un enfoque diferente a más de cien estudiantes brindando un espacio de aprendizaje y enseñanza de la matemática de diferentes temáticas.

Dentro de los talleres seleccionados para su realización en el marco de la Universidad Nacional de Salta, con docentes destacados en ambas materias, tuvimos un abordaje de la enseñanza y aprendizaje de la matemática desde una diferentes mirada que fue muy bien recibida por los diferentes estudiantes del medio.

Esta integración de miradas y estrategias diversas logra que un estudiante que participa de la Olimpiada Matemática Argentina, tenga una mirada abarcativa, diferente y sobre todo con marcada diferencia en cuanto al resto de los estudiantes.

Estamos seguros que los conceptos trabajados convergerán en una mejora en relación al desempeño dentro de las evaluaciones de calidad de la Provincia de Salta para este año.

Los estudiantes participantes de talleres llegan no solo de Salta Capital sino de diferentes puntos de la provincia unificando el concepto de que el aprendizaje y enseñanza de la matemática une más allá de los límites geográficos.

También para los docentes planteamos perfeccionamientos específicos con docentes que son especialistas en diferentes temáticas pertenecientes a la división educativa de la Olimpiada Matemática Argentina

Con todo esto es un placer invitar a los docentes a ser parte de esta gran propuesta en pos de un logro conjunto de mejora en la enseñanza-aprendizaje de Matemática en la provincia de Salta.

Múltiples registros con los axiomas de incidencia de la geometría euclidiana

Antonio Noé Sángari
Universidad Nacional de Salta
jem@exa.unsa.edu.ar

Resumen. Este trabajo explora el concepto de registros en geometría, entendidos como diferentes formas de representar y comunicar conceptos geométricos. Estos registros incluyen lingüísticos (uso de lenguaje verbal), gráficos (dibujos y diagramas), simbólicos (símbolos matemáticos), manipulativos (uso de materiales físicos) y computacionales (uso de software). Luego, se destaca la importancia del registro simbólico en la lógica y geometría.
El uso del registro simbólico aporta profundidad al concepto, permitiendo abstracción y generalización. También ofrece rigor y precisión mediante el lenguaje formal y las reglas lógicas. La relación con la lógica es estrecha, ya que el registro simbólico se basa en principios lógicos y fomenta la comprensión de la lógica y la geometría. La demostración de un axioma de incidencia se muestra como un ejemplo de cómo el registro simbólico facilita el razonamiento y la comprensión de los conceptos.
Además, se menciona que la lógica puede abordarse como un juego sintáctico, lo que la hace más accesible y atractiva para principiantes en matemáticas. Esta aproximación enfatiza en las reglas y estructura, se relaciona con el pensamiento abstracto y permite una exploración gradual y experimentación.

Palabras clave — Registros en geometría, Representación geométrica, Enseñanza de matemáticas, Experimentación en lógica y geometría, Comprensión geométrica.

1. Introducción

1.1 Importancia del trabajo con varios registros

Entenderemos a los registros en geometría como las diferentes formas en que se pueden representar y comunicar los conceptos y procesos geométricos. Los registros son sistemas semióticos que permiten la expresión y el intercambio de ideas geométricas entre los estudiantes, los docentes y los materiales de enseñanza. Ver Duval [63]

Los registros en la geometría pueden incluir:

- Registros lingüísticos: El uso del lenguaje natural, incluyendo términos, definiciones, proposiciones y argumentos geométricos expresados en palabras.
- Registros gráficos: El uso de dibujos, diagramas, esquemas y representaciones visuales para ilustrar y comunicar ideas geométricas.
- Registros simbólicos: El uso de símbolos matemáticos y notación algebraica para expresar relaciones y propiedades geométricas.
- Registros manipulativos: El uso de materiales físicos, como modelos geométricos, construcciones con regla y compás, o manipulación de objetos tridimensionales, para explorar y experimentar con conceptos geométricos.
- Registros computacionales: El uso de software de geometría dinámica, como Geogebra, para visualizar y manipular objetos geométricos, realizar construcciones interactivas y realizar cálculos relacionados con la geometría.

El tratamiento de los registros en los axiomas de incidencia de la geometría euclidiana es importante porque nos permite comprender y comunicar de manera efectiva los conceptos y propiedades geométricas. Aquí hay algunas razones clave por las cuales el tratamiento de los registros es relevante en este contexto:

Claridad y comprensión: Los diferentes registros ofrecen diferentes formas de representar y comprender los axiomas de incidencia. Al utilizar registros lingüísticos, gráficos, simbólicos y manipulativos, podemos abordar los axiomas desde múltiples perspectivas, lo que facilita la comprensión de los conceptos geométricos involucrados.

Comunicación efectiva: Los registros nos permiten comunicar los axiomas de incidencia de la geometría euclidiana de manera clara y precisa. Cada registro tiene su propio lenguaje y conjunto de convenciones, lo que permite una comunicación más efectiva entre estudiantes, docentes y materiales de enseñanza.

Representación visual: Los registros gráficos y manipulativos, como diagramas, modelos físicos y construcciones geométricas, permiten una representación visual de los axiomas. Esto ayuda a los estudiantes a visualizar y comprender mejor las relaciones espaciales y las propiedades geométricas.

Abstracción y generalización: El uso de registros simbólicos y lingüísticos, como fórmulas matemáticas y definiciones formales, permite la abstracción y generalización de los axiomas de incidencia. Estos registros nos permiten expresar los axiomas de manera concisa y formal, lo que facilita su aplicación en diferentes contextos geométricos.

Flexibilidad y transferencia: Al trabajar con diferentes registros, los estudiantes pueden desarrollar habilidades de flexibilidad y transferencia conceptual. Pueden aprender a traducir y relacionar los conceptos geométricos entre diferentes registros, lo que les permite aplicar su conocimiento en una variedad de situaciones geométricas.

En este trabajo presentaremos breves comentarios sobre el uso de múltiples registros para la enseñanza de los axiomas de incidencia de la geometría euclidiana, pero enfatizando el registro simbólico.

2. Requisitos previos

Entendimiento básico de la lógica proposicional y el razonamiento deductivo. Conceptos básicos de Geometría Euclidiana.

3. Desarrollo

3.1 Comentarios sobre el problema teórico

El conjunto de símbolos propios de la teoría **IGE** de Incidencia de la Geometría Euclidiana son $\{=, \mathcal{P}(), \mathcal{R}(), \pi(), \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(), \mathcal{I}_{\pi}()\}$. Esto quiere decir que debo escribir esta teoría usando solamente estos símbolos y otros símbolos de la lógica. Por costumbre, a las variables se las escribe con letras mayúsculas de imprenta, si se quiere hacer alusión a puntos, con letras minúsculas de imprenta si se quiere hacer alusión a rectas, y con letras griegas minúsculas si se quiere hacer alusión a planos. $\mathcal{P}(A)$ se lee «A es un punto», $\mathcal{R}(s)$, «s es una recta», $\pi(\nu)$ «ν es un plano», $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(P, m)$ «El punto P está en incidencia con la recta m» o «m pasa por P» o «P está en m», etc; y similarmente para $\mathcal{I}_{\pi}(P, \alpha)$. Para acortar la notación, un pequeño abuso de notación permitido es $\mathcal{P}(A, B, C)$ lo entendemos por $\mathcal{P}(A) \wedge \mathcal{P}(B) \wedge \mathcal{P}(C)$ y similarmente para $\mathcal{R}()$, $\pi()$. También escribimos $A, B, C \in r$ en cuenta de $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(A, r) \wedge \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(B, r) \wedge \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(C, r)$ y $A, B, C \in \alpha$ en cuenta de $\mathcal{I}_{\pi}(A, \alpha) \wedge \mathcal{I}_{\pi}(B, \alpha) \wedge \mathcal{I}_{\pi}(C, \alpha)$, siempre que esto no lleve a ambigüedad. Ver Margaris [64]

Observacion. La pregunta que puede surgir es ¿Cuál es el valor agregado del uso del registros simbólico? Se puede responder de dos maneras: Primero, tiene una gramática muy simple (en comparación a los lenguajes naturales como el inglés o el español). Segundo, es un problema sintáctico, y por lo tanto, los pasos en una deducción son solamente manipulación de cadenas.

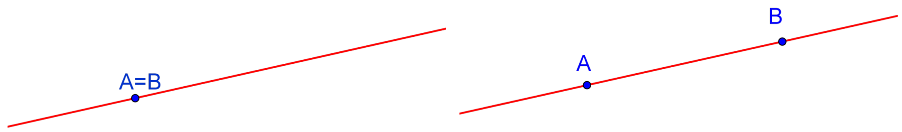
Para entender mejor el segundo punto en la observación anterior vamos a considerar lo siguiente: Si en cuenta de leer $\mathcal{P}(A)$ como «A es un punto» se lo leyera como «A es un jugador de futbol», $\mathcal{R}(s)$ como «s es una recta» se lo leyera como «s es un equipo de futbol» , $\pi(\nu)$ se lo leyera como «ν es un plano», $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(P, m)$ «El punto P está en incidencia con la recta m» o «m pasa por P» o «P está en m», etc; y similarmente para $\mathcal{I}_{\pi}(P, \alpha)$.

3.2 Ejemplo ilustrativo

Consideremos el primer axioma de incidencia según la formulación de Efimov [65]: «Cualesquiera que sea el punto A y cualesquiera que sea el punto B, existe una recta a que pasa por A y por B».

- Registro lingüístico: Podemos expresar el axioma utilizando lenguaje verbal, por ejemplo: «Cualesquiera que sea el punto A y cualesquiera que sea el punto B, existe una recta a que pasa por A y por B».
- Registro gráfico: Podemos representar el axioma mediante un diagrama que muestra dos puntos A y B y una línea que los conecta. Ver figura 11.1

FIGURA 11.1



- Registro simbólico: Podemos usar símbolos matemáticos para expresar el axioma, por ejemplo: $\forall A \forall B \exists r (P(A,B) \rightarrow \mathcal{R}(r) \wedge A, B \in r)$
- Registro manipulativo: Podemos utilizar regla y compás para construir físicamente una línea que pase por los puntos A y B.
- Registros computacionales: Con el uso de Geogebra, se puede realizar dibujos dinámicos, es decir que en este caso pudiera cambiarse las posiciones relativas de A y de B y ver el cambio de la línea que pasa por A y por B. Para más ejemplos de este recurso puede verse [66].

Es común interpretar de la representación lingüística de este axioma que los puntos A y B son distintos. En esta formulación de los axiomas de incidencia, no se especifica explícitamente que los puntos A y B deben ser distintos y, por lo tanto, permite la posibilidad de que A y B sean el mismo punto. Sin embargo, en el caso de la representación simbólica, y con un pequeño auxilio de la lógica, se despejan las dudas. Por ejemplo, revisando la siguiente demostración con el uso del registro simbólico queda claro una implicación de este axioma:

Teorema. Si existe un punto, existe una recta: $\vdash \exists A \mathcal{P}(A) \rightarrow \exists r \mathcal{R}(r)$

Demostración.

1.	$\exists A \mathcal{P}(A)$	as
2.	$\mathcal{P}(A)$	cA
3.	$\forall A \forall B \exists r (\mathcal{P}(A,B) \leftarrow \mathcal{R}(r) \wedge A, B \in r)$	ax1
4.	$\exists (\mathcal{P}(A,A) \leftarrow \mathcal{R}(r) \wedge A, A \in r)$	spec
5.	$\mathcal{P}(A,A) \rightarrow \mathcal{R}(r) \wedge A, A, \in r$	cr
6.	$\mathcal{R}(r)$	SC 2,5
7.	$\exists r \mathcal{R}(r)$	$\exists$
8.	$\exists r \mathcal{R}(r)$	c5
9.	$\exists r \mathcal{R}(r)$	c2
10.	$\exists A \mathcal{P}(A) \rightarrow \exists r \mathcal{R}(r)$	DT 1-9

□

En esta demostración solamente usamos el axioma propio 1, además de metateoremas del cálculo de predicados con la igualdad. Una explicación puede ser la siguiente:

1. Se supone la existencia de un punto A ($\exists A$) y se afirma que es un punto ($\mathcal{P}(A)$).
2. Se introduce la notación "cA" para denotar el uso de la regla C.
3. Se utiliza el primer axioma de incidencia.
4. Se realiza una instancia de cuantificador universal, reemplazando B por A en el axioma, es decir especializando el axioma.
5. Se utiliza nuevamente la regla C pero esta vez en r.
6. Se utiliza un silogismo o un teorema del calculo de proposiciones (SC) para concluir que r es una recta.
7. Se utiliza la introducción del cuantificador existencial para afirmar que existe una recta r.
8. Se descarga la regla C aplicada a r.
9. Se descarga la regla C aplicada a A.
10. Se aplica el teorema de la deducción y se concluye.

4. Bibliografía

[63] Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. https://books.google.com.ar/books?id=ToOpAAAACAAJ

[64] Margaris, A. (1990b). *First Order Mathematical Logic*. Dover Publications. https://books.google.com.ar/books?id=q3mObeaklrIC

[65] Efimov, N. (1984). *Geometría superior*. Mir. http://books.google.com.ar/books?id=-eD-uAAACAAJ

[66] Sángari, C., A. y Egüez. (2021). *Geometría Euclidiana con GeoGebra*. eUNSa.

JEM VII

UNSa
Universidad
Nacional de Salta